BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

Graduate Library
University of Michigan

Preservation Office

Storage Number: ____________

ABN2464
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 11015884//r84
020/1: : |c DM5.00
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B41887
035/2: : |a (CaOTULAS)160031640
040: : |a DLC/ICU |c ICU |d CStRLIN |d MiU
043: : |a e-gx---
050/1:0 : |a QA462 |b .T8
100:1 : |a Treutlein, P. |q (Peter), |d 1845-1912.
245:04: |a Der geometrische anschauungsunterricht als unterstufe eines zweistufigen geometrischen unterrichtes an unseren höheren schulen, |c von P. Treutlein mit einem einführungswort von F. Klein und mit 38 Tafeln und 87 Abbildungen im Text.
260: : |a Leipzig, |a Berlin, |b B.G. Teubner, |c 1911.
300/1: : |a x, 216 p. |b illus., diagrs. |c 23 cm.
500/1: : |a "Figurenteil" (40 p.) in pocket on back cover.
504/2: : |a "Verzeichnis von schriften über den geometrischen anschauungsunterricht": p [209]-216.
650/1: 0: |a Geometry |x Study and teaching |z Germany.
998: : |c RSH |s 9120

Date work Began: ____________
Camera Operator: ____________

Alexander Ziwet

DER GEOMETRISCHE ANSCHAUUNGSUNTERRICHT

ALS UNTERSTUFE EINES ZWEISTUFIGEN GEOMETRISCHEN UNTERRICHTES

AN UNSEREN HÖHEREN SCHULEN

VON

P. TREUTLEIN
DIREKTOR DER GOETHESCHULE
IN KARLSRUHE

MIT EINEM EINFÜHRUNGSWORT VON
F. KLEIN
UND MIT 38 TAFELN UND 87 ABBILDUNGEN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

EINFÜHRUNGSWORT.

Es wird Vielen, gleich mir, besondere Befriedigung verursachen, daß unser verehrter Fachgenosse, Hr. Treutlein, sich entschlossen hat, die Grundlinien des von ihm ausgebildeten geometrischen Anschauungsunterrichtes im Zusammenhang darzustellen und der Allgemeinheit zugänglich zu machen; jedermann kann nun über Sinn und Ziel der Methode urteilen, wenn er freilich auch der gedruckten Darstellung das beste: die lebendige Persönlichkeit des Lehrers, der den pädagogischen Beruf als eine freie Kunst betätigt, nur unvollkommen entnehmen kann. Dieser Kunst bleibt es überlassen, von den anschauungsmäßigen Elementen aus schon während des vorbereitenden Unterrichts allmählich zur logischen Erfassung der Zusammenhänge überzuleiten, so daß nicht nur eine vorläufige Kenntnisnahme der grundlegenden räumlichen Vorstellungen, sondern unmittelbar eine tragfähige Grundlage für den höheren geometrischen Unterricht gewonnen ist, der, wie es Max Simon einmal ausdrückt, eine chemische Verbindung von Anschauung und Logik darstellen soll.

Für den Hochschullehrer kann die Aufgabe nicht sein, auf die Einzelheiten der Treutlein'schen Darlegungen einzugehen. Ich spreche aber gern aus, daß ich überall die gleichen Grundsätze wiederzufinden meine, denen ich bei meiner eigenen Lehrtätigkeit von je gefolgt bin. Eine derartige Übereinstimmung ist ja in letzter Linie Sache der persönlichen Veranlagung. Ich gedenke indeß gern des Umstandes, daß ich in vergangenen Jahren in der Richtung, die hier in Betracht kommt, schon einmal von Karlsruhe her wertvollste Anregung erhielt. Monge und seine Schüler haben bekanntlich zuerst geometrische Modelle für den Hochschulunterricht systematisch hergestellt und benutzt; das Verdienst, dies Verfahren nach Deutschland verpflanzt zu haben, gebührt in erster Linie Christian Wiener, dem langjährigen Vertreter der darstellenden Geometrie am Karlsruher Polytechnikum. Hier haben wir Anderen maßgebende Eindrücke gewonnen. Ich nehme an, daß zwischen der Tätigkeit von Wiener und derjenigen von Treutlein kein unmittelbarer geschichtlicher Zusammenhang besteht. Um so bemerkenswerter erscheint mir die innere Verwandtschaft in der Wirksamkeit der beiden Männer. Von den Zentren geistigen Lebens, die wir in Deutschland glücklicherweise noch in großer Zahl besitzen, hat eben jedes seine besondere Eigenart, die sich nicht nur in Kunst und allgemeiner Lebensauffassung, sondern auch im Mikrokosmus des mathematischen Unterrichtsbetriebes immer wieder aufs neue bewährt.

Göttingen, den 26. Februar 1911.

F. KLEIN.

VORWORT.

Nach mehr als 40jähriger Lehrtätigkeit im mathematischen Unterricht übergebe ich vorliegende seit Jahren geplante und in Bruchstücken verfaßte, aber jetzt erst fertiggestellte Schrift dem Urteil der Fachgenossen und, soweit möglich, der Nutzanwendung der zum Aufstellen und Ausarbeiten von amtlichen Lehrplänen Berufenen.

Zeitdauer und Art meiner Unterrichtserfahrung dürften wohl gestatten, mit Vorschlägen zu einer gewissen Neugestaltung des mathematischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen öffentlich hervorzutreten — habe ich doch nicht nur im amtlichen Hauptdienst am Gymnasium und am Realgymnasium und an beiderlei Anstalten sowohl nach altem als nach Reformlehrplan unterrichtet, sowie auch im Nebenamt entsprechenden Unterricht bei Mädchen gegeben, und habe ich doch auch als Direktor einer großen Schule mit leider nur zu reichlichem Lehrerwechsel und als amtlich mit Prüfung von Schulen Beauftragter sowie in zwei Studienreisen, die mich in eine größere Zahl von Schulen Nord- und Süddeutschlands und auch Österreichs führten, vielfach Gelegenheit gehabt, andere, Geschickte und Ungeschickte, an der Arbeit zu sehen und meine vergleichenden Beobachtungen anzustellen, auch die Erlaubnis dafür erhalten, in beschränktem Umfang nach eigenem Ermessen Erprobungen von Neuem vorzunehmen.

Also die Möglichkeit, Erfahrungen zu sammeln, Vieles und Verschiedenartiges zu sehen, war mir in dankenswert reichem Maße geboten — ob ich sie benützt, ob die Anregungen und Vorschläge, die ich hier für ein Teilgebiet veröffentliche, Zeugnis dafür ablegen, daß ihre Grundgedanken richtig, daß deren Gestaltung und Ausführung im einzelnen praktisch brauchbar, das mögen Berufene entscheiden.

Gar manches von dem, was ich hier vorbringe, ist in gewissem Sinn seit 60 Jahren in Österreich amtlich eingeführt und ist bei uns zerstreut und vereinzelt schon länger und von Verschiedenen angegeben oder als wünschenswert verlangt und als durchführbar erprobt worden; die Zusammenfassung all dessen und die innere Ausgestaltung zumal der anschaulichen Raumlehre der Unterstufe dürfte doch für deutsche Verhältnisse in gewisser Hinsicht als neu erscheinen. Am meisten möchte wohl die Verwandtschaft meiner Ausführungen mit

den allgemeinen Forderungen der sog. „Meraner Vorschläge“ in die Augen springen sowie mit den jüngst von Höfler veröffentlichten ausführlichen Skizzen zu einer befriedigenden anschaulichen Raumlehre, und es kann mich nur freuen, daß ich mich mit dem Plan der Herren des Unterrichtsausschusses der deutschen Naturforscher und Ärzte und mit den Darlegungen des bekannten österreichischen Methodikers auf einerlei Bahn zusammenfinde, und daß ich bei beiden die Bestätigung erhalte für das von mir schon lange vorher Geplante und in wiederholtem Unterricht Erprobte.

Als Zeugnis dafür, daß meine Pläne zu einer, wie ich glaube, verbesserten Unterrichtsgestaltung unabhängig von den beiden genannten Quellen entstanden und schon anderthalb Jahrzehnte vor deren Veröffentlichung festgelegt und sogar amtlich gebilligt und seitdem praktisch durchgeführt worden sind, darf ich und muß ich wohl den Schluß der Abhandlung anführen, die ich im Jahre 1896 als Beilage zum Jahresbericht des Realgymnasiums Karlsruhe veröffentlicht habe unter dem Titel: „Der Lehrplan für den mathematischen Unterricht des badischen Realgymnasiums“. Hierin finden sich (S. 27 ff.)

„Vorschläge zu einer Neugestaltung des Lehrplanes“

und ebenda heißt es:

> „Die bisher gegebenen Darlegungen sollten keinen anderen als den üblichen Maßstab an die Gestaltung des mathematischen Unterrichtsplanes anlegen, d. h. diese Gestaltung sollte von dem Gesichtspunkt aus betrachtet werden, daß der ganze Unterrichtsstoff des 9jährigen Kurses in einem einzigen Lehrgang, in Sexta beginnend, in Oberprima schließend, behandelt wird.
>
> Ich habe aber schon weiter oben bemerkt, daß ich einer andersartigen Gestaltung des mathematischen, hauptsächlich des geometrischen Unterrichtes unserer Realgymnasien, aber auch unserer Gymnasien den Vorzug gegeben sehen möchte, derjenigen nämlich, die man kurz die „österreichische“ nennen mag. Ihr auszeichnender Charakter ist der der Zweistufigkeit, in der Art, daß in Geometrie annähernd derselbe Stoff sowohl im Unter- wie im Ober-Gymnasium, freilich beidemal in durchaus verschiedener Weise zur Behandlung kommt — dort propädeutisch minder ausgedehnt und wesentlich auf Anschauung begründet, hier erweitert, strenger und auf Gründe wissenschaftlicher Einsicht, d. h. begrifflicher Entwickelung gestützt. Ich gestehe gern, daß ich von dieser Art von Lehrplangestaltung nicht eben begeistert war, solange ich sie nur auf dem Papier, aus den gedruckten Verordnungen kannte. Wahrhaft Leben und Bedeutung gewann sie aber, als ich sie in der Praxis der Schule

kennen lernte auf einer längeren Studienreise, die mich in die Gymnasien und Realschulen zu Salzburg, Linz, Melk, Wien, Graz und Innsbruck führte. Hier sah ich fast überall recht gute Unterrichtsergebnisse trotz der im Vergleich zu deutschen Gymnasien beträchtlich geringeren wöchentlichen Stundenzahl. Die Methode ist fest ausgebildet, seit über 40 (— jetzt 60 —) Jahren unterrichtet man nach ihr, und so sehr auch einzelnes während dieser Zeit abgeändert und verbessert worden ist, an dem Charakter der Zweistufigkeit hat man festgehalten; und auch der neueste bezügliche Erlaß des Unterrichtsministers von 1892 (— und jetzt von 1909 —) will von ihm nicht lassen, und ebenso kann ich bezeugen, daß alle die dortigen Lehrer, mit denen ich hierüber sprach, gerade dies als einen wesentlichen Vorzug ihres Lehrplanes unbedingt beibehalten wissen wollen.

Welches sind nun die Vorzüge dieses österreichischen Verfahrens? Auf Grund meiner Studien und Erfahrungen glaube ich es als methodisch richtiger und zugleich als praktisch zweckmäßiger bezeichnen zu müssen.

Daß es praktisch zweckmäßiger ist, geht schon aus der einen Tatsache hervor, daß z. B. an unseren (badischen) Gymnasien von den im letzten Halbjahrhundert, ebenso von dem am Karlsruher Realgymnasium in den Jahren 1879/88 in Sexta Eingetretenen nur etwa 40% bis zum stereometrischen Unterricht der Oberklassen gelangten, daß also die vorher Abgegangenen in der Zahl von 60% nie etwas von wirklicher Körperlehre (oder von Rauminhaltsberechnungen) gehört haben, also von einem Gegenstand, den die einfache Volksschule im 7. und 8. Schuljahr wenigstens praktisch erledigt; und wenn man nur diejenigen in Rechnung zieht, welche von Untertertia ab wissenschaftlichen mathematischen Unterricht erhalten haben, so sind es von ihnen gleichwohl 50%, die nicht bis zu jenen elementaren und fürs praktische Leben durchaus notwendigen Dingen vordringen. Zu solchen Folgen gelangt man, wenn man den Lehrplan der 9klassigen Anstalten fast einzig nur für die verhältnismäßig wenigen Schüler aufbaut, welche bis zur Reifeprüfung gelangen.

Jene österreichische Stoffverteilung ist aber auch methodisch richtiger. Denn sie wählt aus dem ganzen Unterrichtsstoff die leichteren Teile heraus und weist diese einer unteren Stufe zu, während wir bei unseren heutigen Lehrplänen oft genug in den mittleren und oberen Klassen abwechslungsweise bei einem Abschnitt zu den schwersten Aufgaben ansteigen, um gleich darauf beim nächsten Abschnitt wieder mit den leichtesten oder wenigstens viel leichteren Dingen zu beginnen und um von ihnen aus abermals zu den Höhen abstrakter Behandlung zu gelangen.

Jene Zweistufigkeit in der Behandlung des geometrischen Stoffes ermöglicht es aber auch, zu rechter Zeit, d. h. nicht erst mit dem 17., sondern schon im 10. bis 14. Lebensjahre des Schülers besonders durch Betrachten und Vergleichen räumlicher Gebilde die mathematische Phantasie anzuregen und methodisch zu bilden; sie gestattet ferner auch, die sonst notwendige Darbietung von ausgedehnteren Schlußreihen der Zeit nach hinauszuschieben und an ihrer Stelle auf der unteren Stufe, wie es sich dem jugendlichen Geiste geziemt, in bevorzugter Weise die Anschauung zu pflegen.

Ebenso gewährt jene Zweistufigkeit den Vorteil, das abgekürzte Rechnen z. B. nicht bloß mehr oder minder nur theoretisch kennen zu lernen, sondern an praktisch wichtigen Beispielen zumal geometrischer Anwendung nutzbringend zu verwerten.

Alle diese Gründe bestimmen mich, dafür zu sprechen, daß an unseren höheren Schulen der Lehrplan für den mathematischen Unterricht in der angedeuteten Weise ausgestaltet werde und an Stelle der jetzt geltenden Lehrpläne trete.

Um aber nicht bloß den Grundgedanken einer solchen neuen Lehrplangestaltung, wie ich sie wünsche, hier anzudeuten, sei es mir gestattet, auf einen im angegebenen Sinn ausgeführten Lehr- und Verteilungsplan hinzuweisen, der im wesentlichen als Muster für die zu wünschenden neuen Pläne dienen könnte. Ich meine den durch die Verordnung des Großherzoglich Badischen Ministeriums vom 27. März 1895 eingeführten mathematischen Teil des „Lehrplans der badischen Oberrealschulen“. Als der im Herbst 1893 zur Begutachtung hinausgegebene Entwurf dieses Lehrplans im November 1894 durch eine besondere Kommission beraten wurde, hatte ich die Ehre, zu dieser Kommission hinzugezogen zu werden. In der betreffenden Sitzung machte ich der Kommission den Vorschlag, den ihr vorgelegten Entwurf des mathematischen Lehrplans durch einen anderen zu ersetzen, der für den geometrischen Teil des Unterrichts das Gepräge der Zweistufigkeit trage. Die Kommission stimmte dem Vorschlag zu und nahm dann den von mir im Anschluß an den vorgelegten Entwurf ausgearbeiteten neuen Entwurf an. Er findet sich aufgenommen im § 11 der genannten Verordnung in folgendem Wortlaut:

§ 11: Mathematik (— hier nur der auf die Geometrie der unteren Klassen bezügliche Teil aufgenommen —).

Klasse 5 (= Quinta). Geometrische Anschauungslehre und Zeichnen: Betrachtung, Beschreibung und Vergleichung einfacher Körperformen. — Gerade, Kreis, Winkel, Parallelen. — Symmetrie. Eigenschaften des Dreiecks, Vierecks, Vielecks, Kreises. —

Entsprechend dem geregelten Fortschreiten geometrischer Anschauung und anschließend an diese wird (anfangs nach Vorzeichnungen des Lehrers an der Wandtafel, später nach Vorlagen) frei gezeichnet. Linien in ihren verschiedenen Lagen, Verbindungen dieser Linien zu einfachen geometrischen Figuren; dann ästhetisch wirkendes einfaches Flachornament, ferner Aufrisse von körperlichen Dingen, zumal antiken Gefäßen. Die Vorzeichnungen sind auch in abgeänderter Größe nachzubilden, wobei die zu wählenden Hauptabmessungen angegeben werden[1]).

Im geometrischen Unterricht ist auch gebundenes Zeichnen zu üben. Gebrauch von Lineal, Winkelscheit und Zirkel bei Ausführung der wichtigsten Konstruktionsaufgaben.

Klasse 4 (= Quarta). Geometrische Anschauungslehre: Gleichheit, Verwandlung, Teilung von ebenen Figuren; Flächenmessung. Flächengleichheit beim rechtwinkeligen Dreieck mit Anwendungen. Grundzüge der Ähnlichkeit geometrischer Gebilde. Beim Unterricht ist Modellieren und Zeichnen reichlich zu verwerten.

Klasse Unter- 3 (= Untertertia). Geometrische Anschauungslehre: Ausgehend von der Betrachtung von Körpern, Modellieren und Erkennen der Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen. Dreikant und Vielkant. Hauptarten der Körper. Oberflächen- und Rauminhaltsberechnung."

Diese Angaben aus dem Jahre 1896 zeigen die Selbständigkeit und den zeitlichen Vorrang meiner in der vorliegenden Schrift ausführlich dargelegten Auffassung betreffs des Wertes und betreffs der Gestaltung eines Unterrichtes in anschaulicher Raumlehre.

Diese Schrift selbst ist in zwei Hauptteile gegliedert; deren Bestimmung, Gliederung und Einzelinhalt mag aus dem unmittelbar nachfolgenden Inhaltsverzeichnis ersehen werden.

Ich möchte nur wünschen, daß meine Darlegungen zu recht vielen praktischen Versuchen gleicher oder ähnlicher Art anregen und daß sie dazu beitragen möchten, die in manchen Kreisen der Lehrerwelt noch bestehende Abneigung gegen einen, zumal ausgedehnteren geometrischen Anschauungsunterricht zum Verschwinden zu bringen. In gleicher Weise möchte ich wünschen, daß die im zweiten Teil dieser Schrift gegebenen Anregungen im sog. wissenschaftlichen Unterricht unserer Mittelklassen Beachtung und Verwertung finden möchten.

---

1) Dieser auf das Freihandzeichnen als Bestandteil des geometrischen Unterrichts bezügliche Abschnitt der Verordnung wurde bald außer Kraft gesetzt wegen Umstimmigkeiten zwischen Zeichen- und Mathematiklehrern.

P. TREUTLEIN.

INHALTSVERZEICHNIS.

Seite

B. Einzelausführungen für den Unterrichtsgang.

I. Körper und aus ihnen abgeleitete Gebilde.

II. Flächeninhalt ebener Figuren.

III. Rauminhalt der einfacheren Körperformen.

Zweiter Teil.

Der geometrische Unterricht der Oberstufe unserer höheren Schulen.

(Eine Skizze.)

Anhang.

Verbesserung: Auf der Figurentafel sollte es bei H. 239 heißen § 68 (anstatt § 18). S. 56, Z. 14 sollte nach „München" eingefügt werden „Leipzig 1880 bis 86".

Zur Einführung.

1. In der vorliegenden Schrift werden Ansichten dargelegt und Vorschläge gemacht, die für eine in Vergleichung mit dem Bestehenden andersartige, wie der Verfasser meint, bessere Gestaltung des mathematischen, im engeren Sinn des geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen eintreten, d. h. der Schulgattungen, wie sie heute als Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen bestehen samt deren verschieden benannten Teilstücken oder Unterstufen.

Der geometrische Unterricht dieser Schulen war früher rein euklidisch nach Form und Stoffanordnung. Im Verlaufe etwa des letzten halben Jahrhunderts ist, als Wirkung durch Jahrhunderte fortgesetzter zahlreicher, wohlbegründeter Angriffe und Verbesserungsvorschläge, mit Recht wohl fast durchweg an Stelle der dogmatischen Darstellung und Lehrform das sog. genetische, d. h. das entwickelnde Verfahren getreten, und zugleich hat man vielerorts auch den Betrachtungsweisen der sog. neueren Geometrie Eingang gewährt. Nicht in gleicher Weise ist bis heute eine Änderung eingetreten in bezug auf die Anordnung, auf die Reihenfolge des an die Schüler zu übermittelnden Stoffes: man folgt auch heute noch im wesentlichen dem Gang des großen Alexandriners, der mit Punkt und Gerade beginnt und spät erst zum Studium der Körper gelangt. Zwar ist vielfach, freilich seltener auf Anordnung der Behörden, sondern meist gemäß dem Gefühl und der Einsicht der Lehrer, dem strengen euklidischen Lehrgang als Einführung in diesen ein kurzer, auf wenige Stunden oder Wochen sich beschränkender Vorkurs vorgelegt worden, der in Anlehnung an die Betrachtung einiger, meist weniger Körperformen aus diesen die Grundgebilde der Geometrie ableitet — ein solcher einigermaßen anschaulicher Unterrichtsbeginn ist aber auch heute noch nicht überall in den Lehrplänen verlangt. Und wie nötig wäre er doch!

Wie immer aber auch heutzutage der Beginn des geometrischen Unterrichtes gestaltet sein mag, alsbald folgt dessen Weiterführung fast durchweg im wesentlichen den Spuren, den deutlichen Wegweisern des ersten, des zweiten usw. bis zwölften und dreizehnten Buches des Euklid, und es geschieht dies derart, daß auf diesen Büchern wie auf Treppenstufen in einer einzigen schrägen Linie angestiegen wird, bis endlich gegen den Schluß des neunjährigen Unterrichtes unserer höheren Schulen deren Insassen, die nun jetzt glücklich

16- bis 17jährig geworden sind, das Wichtigste von den Körpern und ihrem Inhalt mitgeteilt wird — letzteres zudem fast immer ohne die Beigabe zeichnerischer Darstellung dieser Körper und oft genug so sehr umkleidet oder fast überdeckt von algebraischem Beiwerk, daß das Räumliche als solches unwillkürlich zurücktreten muß. Und doch ist das Räumliche die Welt, deren Verständnis, und das Räumliche ist der Gegenstand, dessen Betrachtung die Hauptsorge des geometrischen Unterrichtes gewidmet sein sollte. Nicht als ob die Figuren der Ebene nicht gründlich durchgearbeitet werden sollten und müßten — aber daß auch ihr Dasein und sozusagen Leben von den wirklichen Raumformen bedingt und aus ihnen abgeleitet ist, daß also unterrichtstechnisch genommen der geometrische, d. h. der übliche planimetrische Unterricht unserer höheren Schulen sich nicht Jahre hindurch von jeder eigentlichen Raumbetrachtung fernhalten darf, getreu der aus anderem Gesichtspunkt gewählten Gedankenfolge und Stoffanordnung Euklids, das sollte erkannt und gewürdigt und in die Tat umgesetzt werden. In diesem und in dem vorhin erwähnten Sinn, also in zweifacher Beziehung Anderes, ja, wie ich glaube, Besseres vorzuschlagen und zu begründen, ist Absicht und Zweck der vorliegenden Schrift.

2. Die Hauptänderung, die ich gegenüber dem in Deutschland üblichen Unterrichtsgang in der geometrischen Lehre vorschlage, ist also die Ein- und Durchführung zweier Stufen des Unterrichtes in Geometrie, entsprechend wenigstens dem Grundgedanken des seit 60 Jahren in Österreich geltenden, mit gutem Erfolg durchgeführten und deshalb dort immer noch allgemein gebilligten Lehrplanes.

In Ausführung dieser Hauptforderung und zu deren Begründung fällt der vorliegenden Schrift die zweigeteilte Aufgabe zu, Wesen, Ziel, Verfahren und Einzelarbeit einer jeden dieser zwei Stufen des Unterrichtes darzulegen und die vorzubringenden Vorschläge zu begründen und als ausführbar zu erweisen. Ausführlicher soll dies für die Unterstufe durchgeführt werden, weil hier das Bezeichnende und Eigentümliche gerade in der Einzelgestaltung gelegen ist, in der Art, wie hierbei die verschiedenen Gesichtspunkte und Rücksichtnahmen zur Geltung kommen, um in ihrer Gesamtbeachtung das erwünschte Ziel, die geometrische Bildung des Schülers, zu erreichen. Für die Oberstufe handelt es sich wesentlich um die Angabe der Gesichtspunkte, die für die Durchführung ihrer Aufgabe bei der neuen Auffassung in Betracht kommen, und um die Vorführung nur von Beispielen der Einzelgestaltung.

Der unteren Stufe, die von Quinta ab zwei bis drei Jahre oder Klassen unserer sämtlichen höheren Schulen umfassen sollte, wird hier als Aufgabe eine anschauliche Raumlehre zugewiesen, noch selbständiger gestellt und reichlicher oder mannigfaltiger ausgestaltet, als

dies im Lehrplan Österreichs der Fall ist, und unmittelbar für das praktische Leben verwendbar seitens der bekanntlich großen Zahl von Schülern (auch der Gymnasien), welche nicht die ganze Schule durchlaufen. So entspräche diese Aufgabe der Unterstufe auch dem allgemeinen Gedanken des Lehrplanes der sog. „Reformschulen", wie sie die letzten zwei Jahrzehnte in reicher Zahl haben ins Leben treten sehen. Indem so durch die Art und durch den Inhalt des in der Unterstufe Gelernten einerseits der Möglichkeit seiner Verwertung im werktätigen Leben gedient wird, soll und wird anderseits dieser Unterricht der Unterstufe auch dem der Oberstufe trefflich vorarbeiten; denn in ganz anderer Weise wie heute üblich vermag er in reichem Maße dem nachfolgenden sog. wissenschaftlichen Geometrieunterricht die Bausteine, den Arbeitsstoff, die Fülle von Vorstellungen zu bereiten und zu schaffen, die vorhanden sein müssen, aber nicht, wenigstens nicht in genügender Menge und in hinreichend sicher gegründeter Weise vorhanden sein können, wenn sie nicht in jahrelanger Einzelbemühung erarbeitet und als festes Eigentum gewonnen sind.

Die obere Stufe, welche die sechs oder fünf letzten Jahre oder Klassen unserer neunkursigen Anstalten zu umfassen hätte, hat freilich wie bisher die ebene und räumliche Geometrie zu betreiben und zu lernen; aber diese Oberstufe darf nicht, wie jetzt fast durchweg üblich, in einen durch Jahre währenden, bloß die Gebilde der Ebene behandelnden Teil und in einen nachfolgenden Teil zerlegt werden, dem dann erst die Betrachtung der körperlichen Gebilde zufällt. Vielmehr soll, wenn auch eine vollständige Verschmelzung („Fusion") der beiden Gebiete nicht beabsichtigt ist oder da sie im elementaren Unterricht manchen als nicht unbedenklich erscheinen mag, so soll gleichwohl eine stete Durchsetzung und Durchdringung des Unterrichtes in ebener Geometrie mit räumlichen Betrachtungen Platz greifen in der Art, daß diese letzteren jenen Hauptteil fortlaufend einleiten und ihn soweit möglich oder nötig begleiten, so daß Auge und Sinn des Schülers stets wieder auf die Raumgestalten hingelenkt werden. In welcher Weise dies geschehen kann und etwa geschehen sollte, wird weiterhin wenigstens an einzelnen Beispielen von Unterrichtsabschnitten zu zeigen sein.

Dem Gesagten zufolge wird sich also der Inhalt der vorliegenden Schrift in zwei Teile zu gliedern haben, deren Stoff durch die folgenden Überschriften gekennzeichnet werden soll:

I. Anschauliche Raumlehre oder geometrischer Anschauungsunterricht der Unterstufe — und

II. [Sog. wissenschaftlicher] Geometrischer Unterricht der Oberstufe unserer höheren Schulen — dieser letztere Teil soll hier nur als Skizze vorgeführt werden.

Erster Teil.

Anschauliche Raumlehre
oder
Geometrischer Anschauungsunterricht auf der Unterstufe unserer höheren Schulen.

3. In unserem höheren Schulwesen ist nach manchen Jahrzehnten ziemlicher Ruhe und stillen Hinlebens in überkommenen Formen im Verlauf des letzten Vierteljahrhunderts eine recht lebhafte Bewegung eingetreten: zuerst die unablässigen in den weitesten Kreisen gepflegten Bestrebungen zur Niederkämpfung des Gymnasialmonopoles sowie zur Erlangung der „Gleichwertigkeit“ und der „Gleichberechtigung“ für die verschiedenen Gattungen höherer Schulen, dann, aus diesem Untergrund emporsteigend und mehr und mehr die „Schulfrage“ beherrschend, die Bemühungen um eine volle Neugestaltung des gesamten Mittel- und Hochschulwesens, zur Anpassung beider, zumal des ersteren, an die heutige Zeit und an deren in die Zukunft reichenden Aufgaben.

Während jene ersteren Bestrebungen sich fast vollständig mit Erfolg gekrönt sehen, ist es nicht in gleicher Weise bestellt um die Bemühungen zur Erreichung des zweiten Zieles: noch stehen wir mitten im Kampfe der Meinungen und der widerstreitenden Interessen, der theoretischen und der praktischen Interessen aller an der Lösung dieser ernsten Kultur- und Machtfrage Beteiligten. Besonders heftig wogt der Streit um Bedeutung und Wertschätzung, also um Schuleinfluß einerseits der alten Sprachen, anderseits der Naturkunde als solcher Unterrichtsmittel, die je nach Meinung mehr oder minder entbehrlich oder nur mit zu berücksichtigen oder aber ganz unerläßlich seien. Als durch einen entsprechenden Vorentscheid zwar wesentlich bedingte, aber damit noch nicht gelöste Unterfrage kommt dann in Betracht und unterliegt der verschiedenartigsten Beurteilung, auf welcher jeweiligen Unterrichtsstufe die zu lehrenden Fächer einzusetzen haben, wie weithin sie zu betreiben und mit welchem Anteil an der gesamten zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit sie zu behandeln seien.

4. Vergleichungsweise abgeklärter ist die besondere Frage des mathematischen Unterrichtes auf unseren höheren Schulen, völlig abgeklärt jedenfalls insofern, als heutzutage im Gegensatz zu Meinungen und amtlichen Vorschriften früherer Zeiten wohl von keiner Seite mehr ernstlich seine Bedeutsamkeit und Notwendigkeit im Lehrplan aller sog. Mittelschulen bestritten wird. So ist denn heute, wenigstens im Kernpunkt, die alte Forderung erfüllt, die Platon über die Türe seines Hörsaales geschrieben haben soll, daß nämlich keiner ohne mathematische Vorbildung zu höheren Studien übergehen soll.

Freilich darüber, wie weitgehend, wie eingehend eine solche allgemeine Vorbildung sein soll, oder in anderer Fragestellung, wie heute der Begriff der den höheren Schulen zuzuweisenden Elementarmathematik gefaßt werden kann und soll, über all dies ist schon weniger Einstimmigkeit der Meinungen vorhanden. Immerhin gehen diese Meinungen nicht so sehr auseinander, daß nicht über das Mindestmaß mathematischer Ausbildung und über den äußerlichen Maßstab für die Erreichung eines solchen Mindestmaßes, d. h. über die Anzahl der für den zugestandenen Mindestbetrieb des betreffenden Unterrichtes notwendigen wöchentlichen Unterrichtsstunden wenigstens eine annähernde Übereinstimmung bestände.

Wesentlich anders steht es betreffs des mathematischen Unterrichtes der Mittelschulen um die Auswahl und die Reihenfolge des den Schülern darzubietenden Stoffes, um die verhältnismäßig stärkere oder schwächere Betonung des einen oder anderen Abschnittes, um die Zielleistungen des ganzen Unterrichtes, um die Abgrenzung des Unterrichtsstoffes nach oben, um die Berücksichtigung seiner praktischen Verwertung, um die methodische Behandlung des ganzen Stoffes, vor allem um den Geist, der den Unterricht durchdringen, ja beherrschen soll. In bezug auf alle diese hier genannten Punkte sind während der letzten Jahrzehnte und besonders im Verlaufe der letzten Jahre neue Forderungen erhoben, neue Gesichtspunkte aufgestellt worden, die dringend Würdigung und Verarbeitung erheischen.

Insbesondere ist seitens des Unterrichtsausschusses deutscher Naturforscher und Ärzte in dessen sog. „Meraner Vorschlägen“ (1905) als eine der künftighin wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichtes die „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ gefordert worden, und zu dessen Pflege, vielmehr zur Abwehr von dessen Verkümmerung wird eine freilich nach Zeit und Umfang bescheidene Propädeutische Raumlehre verlangt. Ebendiesen Bestrebungen soll die vorliegende Schrift dienen mit ihren Forderungen und Vorschlägen, die in der Hauptsache keine durchaus neuen Gedanken vorbringen sollen und können, denen aber doch wohl einige Beachtung zugestanden werden mag, da die vorgeschlagene Art und Weise der praktischen Ausgestaltung des Unterrichtes, die Einzelausführung in

der Nutzbarmachung der treibenden Gedanken vielleicht doch einiges Neue bieten möchte.

5. Wer mit Vorschlägen zur Abänderung des gewohnten oder meist üblichen Unterrichtsbetriebes, also mit dem Antrag auf Beschreitung neuer oder bisher wenig begangener, weil mehr seitab gelegener Wege methodischen Vorgehens hervortritt, hat, wie mir scheint, die Pflicht, das Bestehende zu würdigen, das Vorhandene kritisch zu prüfen, die mannigfachen und verschiedenartigen Wege aufzuzeigen, auf denen bis dahin versucht worden ist, die selbstgesteckten oder die vorgeschriebenen Ziele zu erreichen. Es fällt also auch mir die Aufgabe zu, das auf unserem Gebiet des Unterrichtswesens Vorhandene als Gewordenes aufzufassen, es in seiner geschichtlichen Entwicklung zu begreifen und als aus solcher Entwicklung hervorgegangen aufzuzeigen, um danach den Wert von Vorschlägen zu Neuem ermessen und würdigen zu können. Diesem Zweck soll der nachfolgende erste Abschnitt vorliegender Schrift gewidmet sein: er soll eine Geschichte des geometrischen Anschauungsunterrichtes bringen.

Unabhängig von solch rückblickender geschichtlicher Betrachtung sind Forderungen nach Umgestaltung der üblichen Lehrweise und Vorschläge zu deren Neugestaltung auch an und für sich zu begründen, und zwar, da es sich um das Lehrverfahren handelt, d. h. um eine passende Übermittelung eines richtig ausgewählten und verteilten Lehrstoffes an die heranwachsende Jugend, so sind jene Forderungen und Vorschläge als richtig zu erweisen, sowohl in Hinsicht auf die geistige und seelische Entwickelung junger lernender Menschen als auch mit Bezug auf die notwendig zu stellenden fachwissenschaftlichen Anforderungen. Damit ist für die Besprechung des vorliegenden Hauptgegenstandes ein zweiter Abschnitt geboten: die Aufstellung und theoretische Begründung der an eine anschauliche Raumlehre zu stellenden Forderungen und der dafür zu wählenden Lehrweise.

Mit dem Gesagten ist noch ein Drittes gegeben, dem solche Neuerungsvorschläge zu genügen haben, wenn sie Aussicht auf Erfolg und auf Annahme haben sollen: es muß nachgewiesen werden, nicht bloß daß die aufgesteckten Ziele richtig und verlockend sein mögen, sondern daß sie auch erreichbar sind, daß der anzutretende neue Weg auch tatsächlich gangbar, daß er gut gangbar und fördersam ist, daß er auf Lehrer wie Schüler erfreuend und anregend wirkt und Vorteile bietet, die gegenüber andersartigem Betrieb erklecklich ins Gewicht fallen, ja das Beschreiten des neuen Weges geradezu zur Pflicht machen können. All das zu diesem dritten Punkt Gehörige tritt aber nicht genügend hervor, wenn nur Hinweise, ungefähre Wegzeigungen

oder Anleitungen allgemeinerer Art gegeben werden; die Sache erfordert vielmehr ausführlichere Darlegungen, ins einzelne gehende Anweisungen und Ausarbeitungen, welche dem Erfahrenen einen genauen Einblick gewähren in die tatsächliche Ausführung der allgemeinen Gedanken, und welche den im Lehren noch minder Erfahrenen oder noch ganz Ungeübten in den Stand setzen, seinen Unterricht im Sinn der neuen Vorschläge methodisch zu gestalten, oder die ihm geradezu den geebneten Weg zeigen, den auch er gehen kann. So wird also ein dritter Abschnitt des ersten der Unterstufe gewidmeten Hauptteiles dieser Schrift die Praktische Gestaltung des Unterrichtsverfahrens in Einzelausführungen enthalten. Um möglichst deutlich zu sein und das durchführbare Verfahren klar aufzuzeigen, schließt sich die Anleitung an die Ausarbeitung eines Schülerheftes an, das in einer Reihe von Figurenseiten hier an den Text angeschlossen ist. Es mag gleich hier bemerkt werden, daß dieses Schülerheft absichtlich ziemlich umfangreich gehalten ist, so daß es wohl gestattet, unter den dargestellten Übungen auch eine dem Einzelnen zusagende Auswahl zu treffen.

6. Dem vorstehend Vorgetragenen entsprechend werden also jetzt die folgenden drei Abschnitte eingehender behandelt werden:

I. Geschichte des geometrischen Anschauungsunterrichtes.
II. Aufstellung und theoretische Begründung der an eine anschauliche Raumlehre zu stellenden Forderungen und der dafür zu wählenden Lehrweise.
III. Praktische Gestaltung des Unterrichtsverfahrens in Einzelausführungen.

Erster Abschnitt.

Geschichte des geometrischen Anschauungsunterrichtes.

7. Schon in den ältesten Zeiten menschlicher Entwickelung muß sich wohl durch die Bedürfnisse des tagtäglichen Lebens wie durch Markt-, Handels- und allgemein durch den Geschäftsverkehr eine Reihe von geometrischen Kenntnissen erzeugt und ausgebildet haben; die Ausdenkung, annähernde Festlegung und stete Anwendung von Maßen der Länge, der Fläche und des Raumes sowie von Gewichten haben die Grundlage solcher Kenntnisse abgegeben. Herodot stellt ja die Vermutung auf, daß die Erfindung der „Geometrie“ als „Feldmessung“, wie der Name bedeutet, in Ägypten aus der Notwendigkeit entstanden sei, die infolge der Nilüberschwemmungen alljährlich verloren gegangenen Ackergrenzen wieder herzustellen

Sollten solche aus vielfacher Erfahrung gewonnenen, wohl auch durch Nachdenken abgeleiteten Kenntnisse, ob wahr oder wenigstens zum Teil falsch, erhalten bleiben, so mußten sie behufs steter Bereithaltung zur Anwendung jeweils dem nachwachsenden Geschlechte mitgeteilt und eingeprägt werden. Naturgemäß erheischte solche Übermittelung irgendwelche zunächst ungeregelte, dann wohl schon recht früh auch eine gewisse geregelte Unterweisung des Kindes durch die Mutter, des Sohnes durch den Vater; solche Unterweisungen erfolgten also wie in den Grundlagen des Zählens und Rechnens so auch in den für das werktätige Leben notwendigsten, d. h. einfachsten Grundlehren geometrischer Dinge.

Selbstverständlich konnte eine derartige Unterweisung nur eine unmittelbar anschauliche sein, und so entspricht die heutige Forderung durchaus anschaulicher Behandlung für die Jugend des Einzelmenschen dem gleichen Gang, den wohl die Menschheit gegangen. Die Anschauung des Lernenden und die Autorität des Lehrenden gemeinsam erzeugten den Glauben, und festgelegt in Regeln erhielt sich dieser durch die Jahrhunderte als Vorschrift zum Handeln.

So lesen wir in der auf Jahrtausende zurückreichenden altägyptischen mathematischen Ahmes-Urkunde [1]) die stets wiederkehrende Redewendung „Mache es so“, „Mache wie geschieht“; sie läßt deutlich genug die Lehrweise erkennen, die man in jenen alten Zeiten befolgte, und die unter Beihilfe und dann nach Überspringen der Anschauung im Überliefern und Einprägen von rezeptartigen Vorschriften bestand —, wie wir sie ja auch lange nachher noch in Europa im Rechenunterricht des 16. und 17. Jahrhunderts finden.

Springen wir, Jahrtausende überschlagend, von Altägypten nach Altindien, so finden wir in dessen (z. B. in Bhaskaras) Schriftwerken die dem Inder und indischem Wesen geläufige Redeformel „Sieh“, „Sehet“, die ohne weitere Erläuterung, aber doch als Begründung der betreffenden geometrischen Figur beigeschrieben ist, und durch welche die Richtigkeit des pythagoreischen Satzes oder der Inhaltsbestimmung des Dreiecks oder der Kreisflächenberechnung dargetan werden soll.[2]) Man mag hierin den Weg des Erfinders und zugleich den der Unterweisung erkennen, die sich auf die Anschauung stützt, und die dem Lernenden in bezug auf das geistige Erfassen doch etwas mehr zumutet als beim Rezeptlernen.

Mitten inne in dem vorhin übersprungenen Zeitraum von Jahrtausenden steht die Entwickelung und hehre Blüte altgriechischen Geisteslebens überhaupt und mathematischer Leistung insbesondere. Wie ganz anders mutet uns im Vergleich zu ägyptischer Erstarrung

---

1) Vgl. Eisenlohr, Papyrus Rhind (1877), S. 106, 107 ff.

2) Cantor I(³), S. 656.

und zum indischen „Sieh“ die ständige euklidische Abschlußformel an: „ὅπερ ἔδει δεῖξαι“ (= quod erat demonstrandum = was zu beweisen war)! Diese eine stets wiederkehrende Wortgruppe, immer zum Abschluß eines wirklichen Beweises gebraucht, kennzeichnet die gewaltige Veränderung, die an den alten ägyptischen und sonstigen aus dem Orient zusammengeflossenen geometrischen Lehren nach deren Überwanderung zu den Griechen und bei deren Um- und Weiterbildung durch die Griechen vorgenommen worden ist: „Euklid — so berichtet uns Proklus (gest. 485 n. Chr.) [1] — stellte die Elemente zusammen, ordnete vieles von früher Herrührende zu einem Ganzen und führte vieles früher Begonnene zu Ende und stützte überdies das von den Vorgängern nur leichthin Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise.“ In der Tat, in einfach strenger Form der Darstellung von wenigen, der Anschauung entnommenen Erklärungen (Definitionen) und Grundsätzen (Axiomen) ausgehend schreitet Euklids Werk durch strenge Schlüsse von Stufe zu Stufe fort, und so ist dieses Elementenwerk wie für den Inhalt, so und noch mehr für die Form der Geometrie das geradezu klassische Vorbild geworden, und ist es seitdem durch all die Jahrhunderte geblieben.

So sehr das „Jahrhundert des Euklid“ in den Leistungen seiner Nachfolger Archimedes und Apollonius neues Großes und Unvergängliches bot, so wenig ist uns über die Unterrichtsweise jener ganzen Zeit überliefert. Nur wenn wir aus der Zeit der Nachblüte alexandrinischer Mathematik die hinterlassenen Schriftwerke von Heron (um 50 v. Chr.) betrachten mit ihren Grundlagen einer rechnenden Geometrie und mit ihren Anleitungen zum praktischen Feldmessen, und wenn wir dabei an die altägyptische Kunst der Harpedonapten oder Seilspanner [2]) denken, so dürfen wir der berechtigten Vermutung Raum geben, daß in der Unterweisung des Jüngers, des Lehrlings in rein praktischer Anwendung der Geometrie, aber wohl auch in deren einigermaßen begründender theoretischer Darlegung stets die Benützung der Anschauung obgewaltet habe, und dies wohl nicht nur zu Beginn, sondern auch im weiteren Verlauf der Unterweisung.

Das alte Hellas ging unter, und Rom trat seine Erbschaft an. Ungemein, ja geradezu großartig veranlagt für alles Praktische, aber außer der Lehre vom Recht durchweg wenig wissenschaftlich gesinnt, haben die alten Römer von geometrischem Wissen nur die allernotwendigsten, alltäglich verwendbaren Vorschriften zur Flächen- und Körperberechnung aus dem bereitliegenden ägyptisch-griechischen Besitz übernommen, und manches davon, an sich schon nicht ganz oder nur unter gewissen Bedingungen richtig, ist dann unter ihren Händen zum Teil noch mehr verstümmelt oder unrichtig gemacht

1) Cantor I(3), S. 260 u. 497. 2) Cantor I(3), S. 104 f. u. 385.

und verwendet worden. Diesem Verwenden und seinem Übermitteln galten neben dem dürftigsten Rechnen die römischen Schriftstellerleistungen, und ihm galten in handwerksmäßiger Behandlung der Anschauung, ohne eigentlichen wissenschaftlichen Gestaltungstrieb, wohl auch ihre Bemühungen beim Unterricht.

8. Die Stürme der Völkerwanderung und die nachfolgenden unruhigen Zeiten und mehr noch der zunehmend weltabgewandte Sinn der christlichen Kirche und ihrer Diener vermochten in Wissenschaft und Lehre keine Änderung zum Besseren zu bringen; nur ein weiteres Herabsinken zeigte sich allenthalben. Und wenn die Darstellung mathematischer, insbesondere geometrischer Lehren schon in den Arbeiten der Spätrömer Boethius († 525), Cassiodorius († um 568) und Isidorus Hispalensis († 636) eine höchst dürftige und geistesarme Gestalt annahm, so wird auch der Unterricht nichts anderes als Wort- und Begriffserklärungen gegeben haben und dürfte wohl in äußerlichen, oberflächlichen Unterscheidungen aufgegangen sein. Eine gesunde Benützung der Anschauung wie überhaupt eine freudige Verwertung der Sinne trat zurück, fehlte mehr und mehr und wurde bald als sündhaft gebrandmarkt.

Die Genannten sind ja freilich die Väter der geistigen Erziehung des frühen Mittelalters: ihnen folgend hat sich die ganze spätrömische Unterrichtsweise dem christlichen Bildungsideale angepaßt. Der Einteilung des alten Varro (116—25 v. Chr.) als dem Ur- und Vorbild nachgehend hat man in der Entwickelung jener Zeiten den ganzen Wissensrahmen in die sieben freien Künste gegliedert und hat diese in zwei Hauptabteilungen zusammengefaßt, in das Trivium und in das Quadrivium, jenes die Grammatik, Dialektik, Rhetorik umfassend, dieses die Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie in sich schließend[1]). In dem ebenfalls hiernach gegliederten Unterrichtswesen mußte allgemein zuerst das Trivium durchlaufen werden, und darnach konnte man sich, wenn passende Lehrer vorhanden waren, an die Fächer des Quadriviums machen, deren Namen ziemlich mathematisch klingen, aber nicht viel von mathematischer Weisheit enthielten.

Jedenfalls war die Geometrie der am wenigsten gepflegte Teil des Wissens und war recht wenig zum anschaulichen Erfassen eingerichtet; soweit sie überhaupt behandelt wurde, war sie mehr allgemein mathematische Erdkunde und umfaßte wohl auch, woraus das angeführte „Ge ponderat" hindeutet, die Lehre vom Maß- und Gewichtswesen.

---

1) Kurz zusammengefaßt in den bequemen Gedächtnisversen:

Gra loquitur, **Dia** verba docet, **Rhe** verba colorat,
Mus canit, **Ar** numerat, **Ge** ponderat, **As** colit astra.

Die Römer hatten wenigstens noch sog. Gromatiker, d. h. Vermesser von Grund und Boden ausgebildet; jetzt aber scheint für die entsprechende Kunst jedes öffentliche Interesse gefehlt zu haben, und so blieben wohl die bezüglichen Arbeiten, wenn sie überhaupt ausgeführt wurden, dem Ermessen und der Weisheit eines beliebigen Mönches überlassen. So unterblieb wohl auch jahrhundertelang ein eigentlich geometrischer Unterricht — höchstens daß vereinzelt nach den aus Euklid entnommenen, aber gar sehr verdünnten oder zu dialektischen Kunststücken zurechtgerückten Angaben des Boetius die einfachsten gestaltlichen Beziehungen und die Rezepte zur Berechnung des Flächeninhaltes von Dreieck, Viereck oder Kreis mitgeteilt wurden, freilich vermutlich zum Teil selbst nach falschen Vorschriften.

Durch Jahrhunderte haben sich dann die Verhältnisse nicht gebessert. Wohl hat die Berührung mit den Arabern und durch sie mit Altgriechenland und Indien vielfach den wissenschaftlichen Sinn angeregt und gefördert, und die sich daraus ergebenden Übersetzungen ins Lateinische haben der überkommenen Wissenschaft allmählich größeren Umfang und reicheren Inhalt und damit frischeres Leben verliehen. Insbesondere hat die erste lateinische Bearbeitung des Euklid (um 1120 n. Chr.) für Lernen und Unterrichten der Geometrie eine hochbedeutsame Rolle gespielt; dieser lateinische Euklid mit seinen hundertfältigen Nachbearbeitungen hat dann durch volle sieben, ja acht Jahrhunderte seine Bedeutung als „Bibel der Geometrie“ beibehalten, ja sie hat sich von Jahrhundert zu Jahrhundert gemehrt, insofern man zuerst nur die Anfänge und noch langehin, selbst bis ins 17., ja 18. Jahrhundert hinein nur die Hauptsachen des ersten Buches von Euklid, seine Erklärungen, Grundsätze und den Text der Sätze und Aufgaben behandelte, sich aber lange die Beweise schenkte; erst später ging man dann auch über das erste Buch hinaus und nahm allmählich auch die räumlichen Betrachtungen in den sich mehr und mehr einbürgernden Unterricht auf. Von einer häufigeren oder eingehenderen Verwertung reichlicher Anschauungsvorübungen als Grundlage scheint dabei aber nirgends oder sicherlich nur recht vereinzelt die Rede gewesen zu sein. Der betreffende Unterricht war und blieb noch lange, bis tief ins 19. Jahrhundert hinein und mancherorts auch noch im 20. Jahrhundert, rein dogmatisch.

9. An der geschilderten Unterrichtsgestaltung hat sich lange nichts geändert, wenn auch nach Gründung der Universitäten im 14. und 15. Jahrhundert, nach Errichtung eigener mathematischer Professuren an ihnen, nach Einführung des Buchdrucks und dadurch ermöglichter Beschaffung billigerer Bücher, nach Erscheinen zumal vieler mathematischer Bücher die Beschäftigung mit Mathematik allmählich große Fortschritte gemacht hat. Die Geometrie freilich blieb „noch

immer ein ziemlich vernachlässigter Zweig der Wissenschaft, an welchem eigene neue Triebe sich nicht zeigten“ (Cantor II, 415). Und der Unterricht in Geometrie, soweit ein solcher überhaupt erteilt wurde, und soweit er sich aus den dafür verfaßten Lehrbüchern schon des 16., mehr noch des 17. und 18. Jahrhunderts erschließen läßt, hat es wesentlich auf die handwerksmäßige Ausübung der praktischen Geometrie (samt der sog. Visierkunst) abgesehen. Denn diese sei ja, wie oft genug ausgesprochen wird, „vieledler zu schätzen“ als die Geometria theoretica, welch letztere oft genug nur als Hilfswissenschaft für erstere und für die Astronomie erklärt und deshalb mehrfach wie verächtlich behandelt wird.

Aus dem nach Anzahl reichen, nach Inhalt meist recht bedeutungslosen elementar-geometrischen deutschen Schrifttum des 16., 17. und 18. Jahrhunderts, soweit dieses für unsere vorliegende Darlegung in Betracht kommt, heben sich zwei in ihrem Wesen grundverschiedene, aber in ihrer Nachwirkung bedeutsame Männer und deren Hauptwerke heraus. Es sind dies Albrecht Dürer (1471—1528) und Christian Wolf (1679—1754).

Dürers geometrisches Hauptwerk „Vnderweysung der messung | mit dem zirckel vñ richtscheyt“, 1525 erschienen, zeigt seinen Verfasser ganz vom geometrischen Geist der mittelalterlichen Bauhütte durchdrungen, zeigt ihn aber auch als Meister in der Beherrschung des Inhaltes und als großen Künstler in der Gestaltung der Form. Dürers Buch gibt kein strenges, auch kein verwässertes euklidisches System, andererseits aber auch keine in niedrig handwerksmäßiger Weise gebotene Rechen- oder Zeichenvorschriften; Dürers Buch trägt die in selbständigem Denken verarbeitete und zum Teil vermehrte geometrische Lehre der Alten vor, aber in künstlerischer Weise zurechtgemacht und gestaltet für die feineren Ziele praktischen Lebens; der Pflege geometrischer Kunst gewidmet und für weite Schichten des Volkes bestimmt, ist Dürers Buch allgemein verständlich gehalten und geht durchweg im Sinn einer geometrischen Anschauungslehre vor.

Leider hat Dürers Vorgehen nicht oder nur wenig, wie es doch möglich gewesen wäre, auf die bessere Gestaltung des geometrischen Unterrichtes eingewirkt; dieser blieb auch nach Dürer in den gewohnten Bahnen, und die allgemeinen Lebensverhältnisse, die Schrecken und Verwüstungen des Dreißigjährigen Krieges und im besonderen einerseits die pfäffisch-theologischen Streitigkeiten des 17. Jahrhunderts, andererseits die von Sturm, Trotzendorf und ihren Nachfolgern (um 1650) durchgeführten Reformen im gelehrten Schulwesen waren durchaus nicht geeignet, das kräftigere Aufkommen geometrischen Unterrichtes und das Besinnen auf verbesserte Unterrichtsweisen auch auf diesem Gebiete zu fördern. Was aber die den Kampf gegen den Wortkram (Verbalismus) aufnehmenden Verteidiger eines gesunden Wirklichkeitssinnes

(Realisten wie Rabelais, Ramus, Bacon v. V.) betrifft und die auf jene sich stützenden pädagogischen Neuerer (wie Ratichius und Comenius und Locke), so wiesen sie ja alle auf die Notwendigkeit eines Anschlußes der Erziehung an den natürlichen Entwickelungsgang des Geistes hin; sie alle betonten grundsätzlich die hohe Bedeutsamkeit der Erfahrung als Erkenntnisquelle, die Induktion, das Ausgehen von der sachlichen Anschauung als das maßgebende Verfahren; aber ihr Kampf und ihre Änderungen und Erfolge betrafen in erster Reihe den überkommenen Sprachunterricht und die Erziehung im allgemeinen, der mathematische Unterricht lag ihnen ferner; für dessen verstärkte Aufnahme und die Verbesserung seines Betriebes, vorab in Hinsicht auf die Pflege der Anschauung, war die Zeit noch nicht gekommen.

10. Als dringend nötige Vorstufe zu besserer Pflege des mathematischen Unterrichtes mußte zuerst dessen wissenschaftliche Unterlage, das Lehrgebäude der Mathematik in klarer, übersichtlicher, allgemein verständlicher, zusammenfassender Darstellung aufgeführt werden. Dies getan und damit der Pflege der Mathematik und mehr noch der Pflege des Unterrichtes in ihr einen großen Dienst geleistet zu haben, ist das Verdienst von Christian Wolf (1679—1754), des Schülers von Leibniz. Seines Lehrers Philosophie vor allem hat Wolf zum Gemeingut deutscher Bildung gemacht und zur Grundlage der „Aufklärung“ dadurch, daß er sie in Vollständigkeit und systematischem Zusammenhang darstellt, daß er in unermüdlicher Geduld, mit ins einzelnste gehender Ausführlichkeit, dabei mit großer Klarheit alles verständig erklärt und durch regelrechte Schlüsse erweist; indem er dabei vielfältig in seinen Vorlesungen und Schriften die deutsche Sprache verwendete und in dieser eine feste philosophische Rede- und Ausdrucksweise einführte, hat er seine so klare Lehre dem allgemeinen Verständnis noch näher gebracht. Wie für die Darstellung philosophischer Lehren, so ist Wolf auch für die Darstellung des mathematischen Lehrgebäudes hoch bedeutsam geworden: er veröffentlicht 1710 seine „Anfangsgründe aller mathematischer Wissenschaften“ (in 4 Bänden) mit all den vorhin gerühmten Vorzügen; er wie überhaupt seine Zeit betont stark die unmittelbare praktische Verwertbarkeit des zu Lehrenden, er betont aber auch den sog. formal bildenden Wert des mathematischen Unterrichtes, und so ist dank ihm das Streben nach strenger Beweisführung allmählich auch in den Schulunterricht eingedrungen.

Nach all den großen Eroberungen seit Descartes bis Leibniz stellt Wolf den Begriff und Rahmen einer Elementarmathematik auf und füllt ihn, damals noch recht moderne Dinge heranziehend, mit Inhalt aus, indem er aus seinen „Anfangsgründen“ einen „Auszug“ veröffentlicht (1713) und durch diesen, der bis gegen Ende des Jahrhunderts

in vielen Auflagen erscheint, der damaligen Schulmathematik ihre Richtlinien gibt. In einer besonderen Schrift[1]) rühmt auch er (wie auffallend viele andere in jener Zeit) die Bedeutsamkeit des Unterrichts in Mathematik, und ebenda (S. 21) betont er auch, „daß alles, was man mit den Sinnen gefasset, leichter und fester behalten werde, als was bloß durch die Kraft des Verstandes begriffen wird".

Aber auch Wolf selbst hat von dieser schönen Behauptung für die Geometrielehre keinen Nutzen gezogen; für die besondere Pflege geometrischer Anschauung war auch seine Zeit noch nicht bereitet.

11. Der wahre, wenn auch zunächst nur mittelbare Anstoß hierzu erfolgte in bekannter Weise durch Rousseau († 1778) und die sog. Philanthropen; die unmittelbarste Einwirkung verdankt man aber erst dem von deren Grundgedanken ausgehenden Pestalozzi († 1827), dem Begründer der neueren Erziehungslehre. Schon 1780 hat er die Hauptforderung seines Strebens in den folgenden Worten niedergelegt[2]): „Allgemeine Emporbildung der inneren Kräfte der Menschennatur zu reiner Menschenweisheit ist allgemeiner Zweck der Bildung auch der niedersten Menschen. Übung, Anwendung und Gebrauch seiner Kraft und seiner Weisheit in den besonderen Lagen und Umständen der Menschheit ist Berufs- und Standesbildung. Diese muß immer dem allgemeinen Zweck der Menschenbildung untergeordnet sein". Der Ausgang aller Unterweisung zur Bildung sei aus der Erfahrung zu nehmen, und es sei anschauliche Entwickelung jeglicher Einsicht zu erstreben im Gegensatz zur bloßen Wortkenntnis. Immer und immer wieder kommt er darauf zurück und erklärt es selbst[3]) als seine „eigentliche Leistung für das Wesen des menschlichen Unterrichtes", daß er als „den höchsten obersten Grundsatz des Unterrichtes die Anerkennung der Anschauung, als des absoluten Fundamentes aller Erkenntnis, festgesetzt" habe, und er fordert, daß jeglicher Unterricht bei den einfachsten Elementen zu beginnen habe und lückenlos fortschreiten müsse; mit der Entwickelung des Erkenntnisvermögens müsse parallel einhergehen die des Sprachvermögens; durch die drei Stufen der (im weitesten Sinn zu nehmenden) Anschauung, ferner der Vorstellung durch Eigenschaftsbestimmung (Beschreibung), endlich der Begriffsbildung müsse alles Lernen auf entwickelndem Wege vorschreiten, und es müsse die Selbsttätigkeit des Schülers herbeigeführt werden.

1) „Vernünftige Gedancken von der Nützlichen Erlernung und Anwendung der Mathematischen Wissenschaften insonderheit wie dadurch der Verstand zu allen Verrichtungen vollkommener zu machen und zu einer gewissen Erkenntniß auch außer der Mathematik zu gelangen sei." (Aus d. Lateinischen übers. von A. v. Steinwehr, 1747).

2) Pestalozzis Ausgew. Werke (hrsgg. v. Fr. Mann), Bd. III, S. 12.

3) Ebenda S. 239.

Stets solle sich dem Wissen das Können anschließen, zur Kenntnis solle sich die Fertigkeit zugesellen.

Von diesen trefflichen Grundgedanken aus findet Pestalozzi, daß „die Mittel zur Verdeutlichung aller unserer Anschauungserkenntnisse von Zahl, Form und Schall, d. i. von der Sprache ausgehen“[1]). Uns soll hier wesentlich der zweite dieser Punkte beschäftigen — denn aus Pestalozzis Auffassung und Behandlung des Geometrieunterrichtes, wenn dieser bei ihm auch noch so elementar war und wenn man später auch noch so sehr von seiner Art abgewichen ist, hat sich doch in der Folgezeit die völlig geänderte Unterrichtsgestaltung unserer Tage insbesondere auch der geometrische Anschauungsunterricht entwickelt.

Pestalozzis bezügliche Lehrweise und methodische Behandlung mathematischer Dinge sind in zweien seiner „Elementarbücher“ niedergelegt, die trotz aller darin sich aussprechenden Einseitigkeiten und langweilenden Übertreibungen geradezu als Bahnbrecher der Methodik zu bezeichnen sind. Diese Schriften (von Krüsi ausgearbeitet) sind das „ABC der Anschauung, oder Anschauungslehre der Maßverhältnisse“ (Nr. 1, a)[2]), 1803 erschienen, in 2 Heften von 84 + 148 Seiten mit je einer Figurentafel) und die „Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse“ (Nr. 1, b, ebenfalls aus dem Jahre 1803, in 3 Heften).

In der ersteren Schrift geht Pestalozzi davon aus (Vorrede S. V), daß „zur Entwickelung des Begriffes der Maßverhältnisse Kunstmittel gefunden werden müssen, welche die Naturkraft zur Verdeutlichung der Vorstellungen von den Maßverhältnissen verstärken“. Für Zahl- und Sprachkenntnis, sagt er[3]), habe man hundertfältige solcher Mittel — nicht so für das Kennenlernen der Form. „Der Mangel an Unterrichtsmitteln über die Form ist nicht bloß als eine einfache Lücke in der Bildung der menschlichen Erkenntnisse anzusehen, sondern er erscheint als die Lücke des eigentlichen Fundamentes aller Erkenntnisse.“

Diese Lücke auszufüllen, ersann Pestalozzi als „Mittel der Anschauungslehre der Maßverhältnisse: 1) die gerade Linie, und 2) das Quadrat“ — „durch deren Anschauung und Vergleichung die Kräfte zum Rechnen (wie auch zur Geometrie) entwickelt werden sollen.“

Zum Verständnis von Pestalozzis Meinung und Unterrichtsbetrieb ist es vonnöten, die erste seiner drei Figurentafeln hier nachzubilden, die als Wandtafelzeichnung in beliebiger Größe zu denken ist.

Die bezüglichen Übungen der Schüler haben nun zu bestehen: 1) im Erfassen dieser Figuren und ihrer Beziehungen zueinander,

---

1) Pestalozzis Ausgew. Werke (hrsgg. v. Fr. Mann), Bd. III, S. 192.

2) Hier und weiterhin soll durch die in Klammern beigeschriebenen Nummern hingewiesen werden auf die im „Anhang“ am Ende der Schrift aufgeführte Zusammenstellung der mir bekannt gewordenen bezüglichen Schriften seit 1800.

3) Pestalozzis Werke III, S. 220.

2) im Nachsprechen des Erfaßten, 3) im jedesmal anschließenden und dann bis zur vollen Geläufigkeit oft zu wiederholenden Nachzeichnen — und zwar in nachstehender Reihenfolge (unter Vorsagen des Lehrers):

Erste Erfassungs- und Redeübung:

a) Dieses (S. 17, Fig. 1a) ist die 1., die 2., ..., die 10. wagerechte Linie [Nachsprechen: Dieses ist ...].

b) Die 1. wagrechte Linie ist kürzer als die 2., die 2. ist länger als die 1., aber kürzer als die 3., usw.

c) Die 1. Linie ist ungeteilt, die 2. ist ..., die 10. ist durch 9 Punkte in 10 gleiche Teile geteilt.

d) Jeder der 2 (3, ..., 10) gleichen Teile der 2. (3., 4., ...) Linie ist die Hälfte (..., zehnte Teil) der ganzen Linie; vom Anfang bis an den 1. Punkt der ... 7. Linie ist ein Siebentel, bis an den 4. Punkt sind es 4 Siebentel der Linie, usw.

e) Die 1. Linie ist die Hälfte der 2., die 2. ist zweimal so lang als der dritte Teil der dritten, ...

f) Dasselbe rückwärts für alle Einzelfälle, z. B. der 7. Teil der 7. ist so lang als der 6. Teil der 6.; zweimal der 7. Teil der 7. Linie ist so lang als zweimal der 6. Teil der 6. Linie usw.

Die gleichen 376 von Pestalozzi einzeln angegebenen Sätze oder Beobachtungstatsachen sollen dann ebenso an den lotrechten Linien (Fig. 1b) durchgesprochen, und es soll „jeder Satz mit den Kindern bis zur größten Geläufigkeit geübt werden".

Darauf werden als zweite Übung die einzelnen Gestaltungen von Fig. 2a und 2b und 3 kennen gelehrt:

a) Wagrecht gleichlaufende Linien: die obere ist mit der unteren, die untere mit der oberen gleichlaufend.

b) Senkrechte Linien (Fig. 2b)): ebenso zu behandeln.

c) Ein rechter Winkel (Schenkel, Scheitel).

d) Zwei rechte Winkel: Die erste Hälfte (!) der wagrechten Linie ist der wagrechte Schenkel des ersten rechten Winkels, usw.

e) Vier rechte Winkel.

f) Quadrat (mit 27 Einzelübungen).

g) Aufrechtes Rechteck.

h) Liegendes Rechteck (mit je 29 Übungssätzen).

Die dritte und vierte Redeübung behandelt in gleicher Ausführlichkeit und mit Angaben von allem daran Auffindbarem die Reihe von Quadraten, die durch wagrechte Linien (Fig. 4), dann durch lotrechte Linien (Fig. 5), dann durch beiderlei Linien (Fig. 6) je in 1, 2, 3, ..., 10 gleiche Teile geteilt sind.

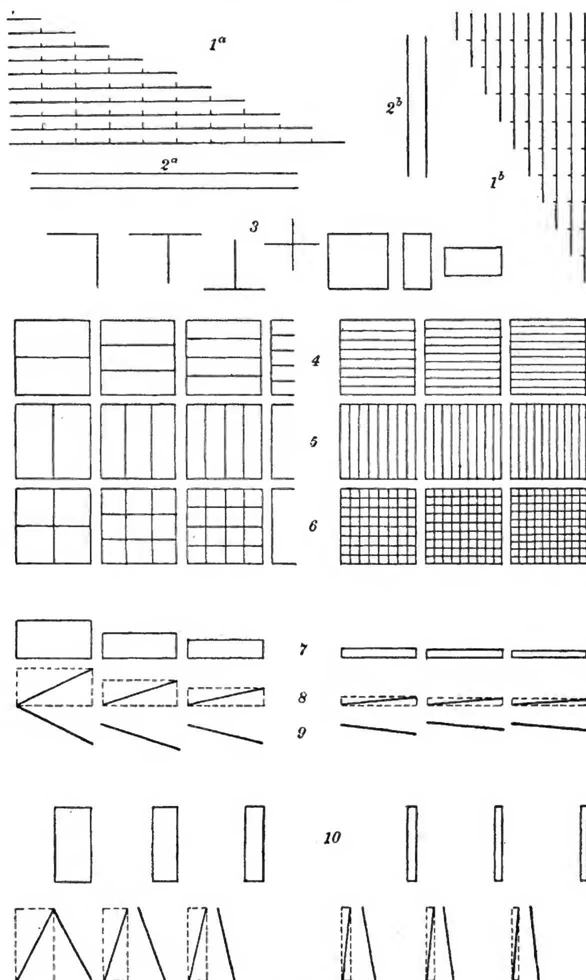


Fig. 1.

Die fünfte Übung ist der Betrachtung von verschieden hohen Rechtecken gewidmet (Fig. 7), welche die Teile der Quadrate von Fig. 4 sind, und weiter werden die darin zeichenbaren rechtsansteigenden (Fig. 8) bzw. linksansteigenden (Fig. 9) Querlinien (Diagonalen), sowie deren Ansteigarten behandelt. Entsprechend sind die Redeübungen über die aufgestellten Rechtecke (Fig. 10) anzustellen.

Anschließend sind, wie gesagt, stets die entsprechenden Zeichnungsübungen durchzuführen.

Soweit das erste Heft des ABC der Anschauung.

Gemäß dem zweiten Heft werden dann in gleicher Weise zwei Figurentabellen durchgearbeitet, deren erste 36 Paare von gleichen Strecken aufweist, wobei die 2 Strecken eines Paares der Reihe nach in 6, 8, 10, ... gleiche Teile geteilt und größere teilfache [aliquote] Stücke je durch dickere Trennungsstriche begrenzt sind. Hier soll nun beispielsweise bei der Sechstelteilung erkannt werden, daß „die Länge von $\frac{2}{3}$ der zweiten Strecke gleich 4 mal dem 3. Teil einer Hälfte der ersten Strecke ist“ — oder bei der Sechsunddreißigstelteilung, daß $\frac{3}{4}$ der ersten Strecke A $\left(=\frac{27}{36}\right)$ gleich 27 mal dem 20. Teil von $\frac{5}{9}$ $\left(\text{d. h. von } \frac{20}{36}\right)$ der zweiten Strecke B sind, usw. in unendlicher Fülle, aber auch in unendlicher Eintönigkeit und gewiß auch ungemessene Langeweile erzeugend.

Die zweite der genannten Figurentabellen zeigt 10 Reihen von je 10 gleichgroßen Quadraten (ähnlich wie vorhin in Nr. 4 bis 6 von Fig. 1); die Quadrate der ersten wagrechten bzw. lotrechten Reihe sind (abgesehen vom ersten ungeteilt bleibenden) durch wagrechte bzw. lotrechte Linien in 2, 3, ..., 9, 10 gleiche Streifen geteilt, und in den übrigen Quadraten verbinden sich entsprechend je die beiden Teilungen. Während die Übungen an der ersten Tabelle „das Kind beschäftigen sollen im Vergleichen der abgemessenen Teile und der Bestimmung ihrer Maßverhältnisse gegen einander“, sollen die der zweiten Tabelle „mit Anwendung der Kraft des Rechnens und des Messens zur Bestimmung des Verhältnisses von Breite und Höhe der Quadratteile hinführen“ und zu der Bestimmung, „wie sich jede Abteilung eines Quadrates als Zahlteil zum ganzen Quadrat verhalte“.

Im tüchtigen Durchüben, d. h. im Erfassen, Nachsprechen und Nachzeichnen des Vorgetragenen besteht also Pestalozzis Verfahren. Er erklärt selbst[1]): „Dieses ABC der Anschauung ist eine gleichförmige Abteilung des gleichseitigen Vierecks (= Quadrates) zu be-

1) Werke III, S, 220.

stimmten Ausmessungsformen und erfordert wesentlich eine genaue Kenntnis des Ursprungs derselben, der geraden Linie in ihrer liegenden und stehenden Richtung. Die Abteilung des Vierecks durch diese letzteren erzeugen dann sichere Bestimmungs- und Ausmessungsformen aller Winkel sowie des Runds und aller Bögen, dessen Ganzes ich das **ABC der Anschauung** heiße."

Pestalozzis grundlegende Gedanken und die Art ihrer praktischen Gestaltung waren hier ausführlicher darzulegen, weil von ihnen zu einem guten Teil vorab für den geometrischen Unterricht, ganz besonders aber für das Unterrichtswesen überhaupt gewaltige Anregungen ausgegangen sind. Was Pestalozzi unmittelbar lieferte und erreichte, kann nicht den Maßstab seines Wirkens und seiner Bedeutung abgeben; diese liegt eben in den genannten Anregungen: „durch seine nie übertroffene, ja niemals erreichte Begeisterung hat er nicht nur Tausende in allen Gesellschaftsklassen für die Erziehungsfragen überhaupt gewonnen, sondern auch dem gesamten Unterrichtswesen neues Leben verliehen."

Freilich, Pestalozzis Art des Vorgehens ist vielfachem Widerspruch begegnet, und zwar nicht nur seitens der Philanthropen, sondern auch von seiten solcher Männer (wie Niemeyer, Fichte, E. M. Arndt), die mit unbefangenem Blick, ja mit Hochachtung und Verehrung zu ihm aufschauten. Das große Publikum aber, das über des großen Schweizers neues Unterrichtsverfahren in den Jahren um 1800 so viel Rühmliches gehört hatte und nun betreffs der Schriften, die darüber aufklären sollten, die höchsten Erwartungen hegte, wurde durch die jetzt erscheinenden so äußerst trockenen Lehrbücher bitter enttäucht, ja abgeschreckt. Was war aus dem einst so beliebten und wegen seiner schönen, lebendigen Schreibart so gepriesenen Verfasser von „Lienhard und Gertrud" geworden? ein steifer Schulpedant, ein gemeiner Rechenmeister, der sich jetzt darin gefiel, mit dem Einmaleins ein dickes Buch auszufüllen?[1]) Wer auf solche Fragen antworten und sie verneinen wollte, mußte tiefer eingedrungen sein in Pestalozzis Wesen und Streben; dies aber getan und früh getan zu haben und zugleich eine auf deutsche Leser berechnete theoretische Darstellung von Pestalozzis Grundgedanken sowie eine eigentümliche Gestaltung, Verallgemeinerung und Weiterführung derselben gegeben zu haben, ist das Verdienst von J. F. Herbart (1776—1841).

12. Wie Herbart das Gesamtgebiet der Erziehungs- und Unterrichtslehre nach seines großen Vorgängers Grundgedanken zu gestalten unternahm und wie er sie auf wissenschaftliche Unterlage gestellt und vertieft hat, muß hier außer Betracht bleiben. Wir haben es

1) E. v. Sallwürk in seiner Ausgabe von Herbarts Schriften Bd. I, 60.

hier nur mit der geometrischen Anschauungslehre zu tun; aber gerade für deren Begründung und wissenschaftliche wie praktische Würdigung hat Herbart sein gut Teil beigetragen, ja den Grund dazu gelegt. Schon in seiner (im Januar 1802) erschienenen Beurteilung von Pestalozzis Buch „Wie Gertrud ihre Kinder lehrt", noch mehr aber in einer besonderen Schrift von 1802 mit dem Titel „Pestalozzis Idee eines ABC der Anschauung" legt Herbart mit eindringendem Verständnis und mit entschiedener warmer Anerkennung Pestalozzis Gedanken dar, die er nur glaubt anders, besser, umfassender ausführen zu sollen. Auch Herbart ist eine zutreffende, allen Rücksichten entsprechende Regelmäßigkeit von bestimmten Reihenfolgen im Unterricht „das große Ideal, worin er das durchgreifende Mittel sah, allem Unterricht seine rechte Wirkung zu sichern". Nun ist „das Anschauen die wichtigste unter den bildenden Beschäftigungen des jugendlichen Menschen", „die Anschauung ist aber der Bildung fähig"; Herbart bestimmte den pädagogischen Wert derselben und wies nach, daß ihre Ausbildung in das Gebiet der Mathematik falle. Indem er nun die zusammengesetzte Tätigkeit des Anschauens zergliederte, fand er, daß dieses tatsächlich gewisser Elementarübungen, ähnlich den Pestalozzischen, bedürfe und zwar zu dem „dreyfachen Zweck: sie sollen die Anschauung bilden, sie sollen der Erziehung helfen, und sie sollen die Mathematik vorbereiten". Nun sind die Gestalten rings um uns recht zusammengesetzt, ihre Erfassung ist nur möglich durch ein Gliedern ihrer Teile nach Form und Lage. Dieses an sich zusammengesetzte und schwierige Geschäft des „Artikulierens der Gestalten"[1]) muß also, soll es leicht und für jedermann zugänglich sein, in seine einfachen Bestandteile zerlegt werden. Solche Hauptbestandteile der Formen sind aber die Punkte. Freilich „einfache Punkte sind nichts, weder für die Form noch für das Maß. Paarweise verbunden haben sie nur eine Länge, eine gerade Linie zwischen sich; diese ist zwar etwas für das Maß, aber, da die Form aller Linien die gleiche, auch hier ist noch keine Form. Eine solche gibt zuerst, und also am einfachsten, die Verbindung dreyer Punkte: die wahren Elemente aller Form sind also die Dreyecke".[2]) Herbart stellt so den Quadraten Pestalozzis seine Dreiecke entgegen: „ich möchte ihm, auf den Wink der Wissenschaft der Formen, sein gleichseitiges Viereck ganz leise hinwegziehen und dafür eine Folge von Dreiecken unterschieben, die seine eigene Idee wohl etwas besser ausführen helfen würde" (S. 77). Und Herbart hält Pestalozzi auch das entgegen, daß er eine Anschauungslehre der Maßverhältnisse habe geben wollen, während doch die Betrachtung der Form voranzugehen habe (II, 192).

---

1) Herbarts Schriften, hrsgg. von E. v. Sallwürk, Bd. II, S. 111.
2) Ebenda S. 114 und 116.

Von dieser Grundlage ausgehend baut Herbart für den Elementarunterricht auf nicht weniger als 56 Oktavseiten[1]) einen vollständigen Lehrgang der Dreiecksverwertung auf, und zwar diesen auf Grundlage der Anschauung in steter Verbindung mit Zeichnen und Messen. „wir müssen — sagt er hierbei einleitend[2]) — unsere Grundlage aus der Erfahrung entlehnen, müssen durch empirisches Messen gewisse Verhältnisse bloß finden, deren Notwendigkeit die Wissenschaft beweist; wir müssen auf unvollkommene Induktionen hin gewisse Sätze glauben, deren Allgemeinheit die Theorie bewährt. Die Strenge der Beweise ist nicht für kleine Knaben; desto mehr ist für sie die mannigfaltige Versinnlichung von Zahlen, Brüchen, Rechnungen, zu denen die Dreiecke beständig veranlassen. Diese Gelegenheit, der Arithmetik mehr Deutlichkeit zu verschaffen, muß, soweit es nur möglich ist, benutzt werden. Besonders wird auch hier der Vorteil erreichbar sein, nicht nur einzelne Größen, sondern die ganze Masse der Dreiecke, als fließend, als in stetigem Übergang begriffen, darzustellen. Es wird also Hoffnung sein, daß durch einerlei Beschäftigung die mathematische Einbildungskraft erzeugt, der Verstand vorgeübt und das Interesse für die ganze Wissenschaft angeregt werden kann."

Herbart wünscht (II, 104) im Unterricht der Schüler „die Mathematik zuerst im 8., 9. oder 10. Lebensjahre in Gestalt des ABC der Anschauung erscheinen" zu sehen und verlangt dafür „in einem Zeitraum von $^3/_4$ Jahren täglich eine Lehrstunde nebst einigen Übungsstunden". Daß hierbei auch das Neubilden von Formen geübt werden soll, sagt Herbart ausdrücklich (II, 183). Er will als Vorübung für seinen geometrischen Anschauungsunterricht schon vom fünf- oder sechsjährigen Kind das Zeichnen auf der Schiefertafel gepflegt wissen und zwar nach Pestalozzis Art, so daß die genau richtigen Figuren, auf durchsichtige Hornplättchen eingeritzt, stets auf die von den Kindern gezeichneten Figuren aufgelegt werden, um so das Auge für das Richtige zu schärfen. Gezeichnet wird zuerst die gerade Linie in verschiedenen Lagen, dann die Strecke in verschiedener Größe, dann ein Kreis und aus ihm losgelöst und mit wechselnd langen Schenkeln die Winkel von 90°, 30°, 10°, 20°, ... Für die Bestimmung der Winkel und durch sie der Dreiecke wählt nun Herbart „der Anschaulichkeit zuliebe" deren Tangenten und Sekanten. Er läßt auf Hornplättchen genau die auf S. 22 folgende Fig. 2 einritzen: in ihr ist eine beliebige Einheitsstrecke = ac aufgetragen, und dann sind zu den von 45° ab je um 5° wachsenden Winkeln die Tangens- und Sekansstrecken $a1$, $a2$, ... bzw. $c1$, $c2$, ... gezeichnet; auf ihnen werden auch die beim Zunehmen des Winkels je um 5° sich

1) Herbarts Schriften, Bd. II, S. 122 bis 178. 2) Ebenda S. 118.

einstellenden Zuwachsgrößen 12, 23, ... ersichtlich. Diese wachsen offenbar immer stärker, je größer der Winkel schon geworden ist.

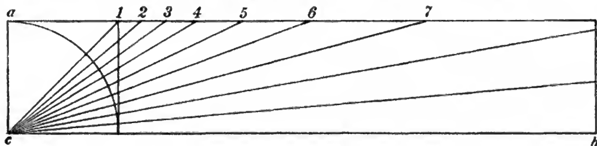


Fig. 2.

Dem lernenden Kinde muß nun diese Figur und ihr Wesen klar auseinander gesetzt werden; dann hat dieses die Dreiecke *ca*1, *ca*2, ... einzeln abzuzeichnen und hat weiterhin auch, mit den drei ersten beginnend, je drei aufeinander folgende Dreiecke möglichst genau nebeneinander zu zeichnen und durch die nachfolgende auf ein zweites Hornplättchen eingeritzte Fig. 3 zu erproben und zu messen. In dieser neuen Figur ist nämlich die in Fig. 2 gewählte Einheitsstrecke *ac*

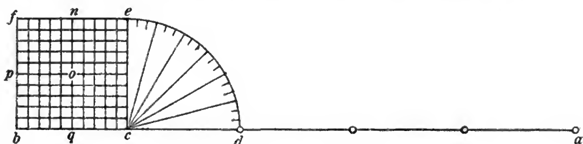


Fig. 3.

5 mal abgetragen, und die erste Strecke ist in 10 gleiche Teile geteilt; mit den passend an Fig. (2) angelegten Hornplättchen der Fig. (3) sollen nun die Tangens- und Sekansstrecken *a*1, *a*2, ... bzw. *c*1, *c*2, ... bis auf Zehntel genau abgemessen werden, und es sollen die gefundenen Werte nicht nur tabellarisch aufgeschrieben, sondern auch [— gleichzeitig mit oft wiederholtem Abzeichnen der betreffenden rechtwinkeligen Dreiecke in wechselnden Lagen —] vollständig „auswendig gelernt" werden (II, 128). Mit dem von 5^0 zu 5^0 eingeteilten Quadranten der Fig. 3 sollen auch die zweiten spitzen Winkel der rechtwinkeligen Dreiecke gemessen werden: sie müssen sich natürlich als Ergänzungen je der ersten zu 90^0 ergeben. Die 9 „triangulären Musterformen" oder „Musterdreiecke" werden nun auch in verschiedenem Maßstab gezeichnet, solange, bis der Schüler einsieht, daß das gewählte Grundmaß die Größe bestimmt, daß jene gemessenen und gelernten Verhältniszahlen (tg und sec) aber die Gestalt, also die Winkel des Dreiecks bestimmen.

Nun sollen in der Umgebung mannigfaltig rechtwinkelige Dreiecke aufgesucht und für sie soll durch Augenmaß geschätzt werden, mit welchen der Musterdreiecke sie übereinstimmen oder zwischen

welche zwei Musterdreiecke sie fallen; „das Auge wird die Schätzung durch viele Proben bis zur Sicherheit berichtigen."

Aus den 9 rechtwinkeligen Musterdreiecken läßt nun Herbart durch Aneinanderlegen je zweier gleichen neue gleichschenkelige Dreiecke ableiten und zwar in der Anzahl = 9 + 8 = 17, je nachdem nämlich jene entweder mit der Tangensstrecke (z. B. $a3$) oder mit dem Radius, d. i. mit der Einheitsstrecke (ca) aneinander gelegt werden, und für diese gleichschenkeligen Dreiecke „weiß man sogleich die Größe der Grundseite, der Schenkel und der Höhe, ausgedrückt in Ganzen und Zehnteln" der gewählten Einheitsstrecke ac. Solcherlei Dreiecke sind dann auch „an verschieden vorkommenden Gegenständen aufzusuchen."

Das passende Aneinanderlegen von je zwei gleichen Musterdreiecken je mit der größten Seite führt weiterhin zur Entstehung von 9 Rechtecken. Deren Inhalt läßt Herbart ausmessen durch Auf- und Anlegen des in 100 kleinere gleiche Teile geteilten Quadratmaßes von Fig. (3): so findet sich für das 2., 3., ... der entstandenen Rechtecke der Inhalt bzw. annähernd = $1\frac{20}{100}$, $1\frac{40}{100}$, . . ., und diese Zahlen erhält man, wenn auch der Maßstab geändert worden. Den Inhalt der Dreiecke erkennt und findet man dann als Hälften der Rechtecke.

Herbart sagt (II, 136), daß diese seine „Behandlung der Flächenmessung, die das Maß von der Zahl sorgfältiger sondert als die gewöhnliche Multiplikation der Grundlinie mit der Höhe, den für ein ABC der Anschauung wichtigen Vorteil hat, daß die Kinder gewohnt werden, auch bei Flächen Größe und Gestalt in Gedanken zu trennen, die Form als Abänderung anderer Formen zu denken und die unterscheidenden Zahlen als bloße Verhältnisbegriffe zu erkennen."

Nach Durchführung des vorstehend gekennzeichneten Unterrichtes wünscht Herbart „eine Pause von ein paar Wochen"; „denn es ist gut, wenn die Erinnerung eine kurze Zeit lang schläft, damit sie mit gleichförmiger Lebhaftigkeit wieder erwache, damit der Unterschied zwischen dem früher und später Gelernten verschwinde, und alles gehörig ineinander dringe."

Bei der Weiterführung des Unterrichtes ist nun weiterhin zu beliebig gestalteten Dreiecken überzugehen. Von diesen läßt Herbart zuerst nur gewisse entstehen und betrachten, nämlich nur diejenigen, die durch Aneinanderlegen seiner ungleichen rechtwinkeligen Musterdreiecke entstehen, die immerhin noch in einer Seite übereinstimmen; diese letztere wird hierdurch zur Höhe des neuen Dreiecks. Man gewinnt so eine begrenzte Zahl von spitz- und von stumpfwinkeligen neuen Dreiecken, deren Winkelgrößen und Seitenlängen gemäß der Entstehung leicht angebbar sind und tabellarisch aufgeschrieben werden.

Zwischen diesen schiefwinkeligen Musterdreiecken liegt dann die unendliche Mannigfaltigkeit aller möglichen Dreiecke. So nähert sich Herbart seinem Ideal, die Dreiecksgestalt, wie fließend betrachtet, gründlich zu betrachten: „der Begriff eines Dreiecks ist ein so äußert wichtiger Begriff, daß er im hohen Grade die Mühe verdient, ihn ganz, durch alle seine Modifikationen zu verfolgen.“

In dieser Absicht wendet sich Herbart zur Berechnung der Seiten der Dreiecke, natürlich zuerst seiner Musterdreiecke. Hierzu bringt er deren Höhe durch Regeldetri-Rechnung auf die Größe 1, setzt unter Benützung der früheren Tabellen die Dreiecksseiten zusammen und ordnet die Ergebnisse übersichtlich tabellarisch an. Er verlangt hierbei, daß die Kinder die sämtlichen Musterdreiecke auf solche Art berechnen — freilich sieht er sich hierbei genötigt, behufs ausreichender Genauigkeit die Tangens- und Sekans-Werte nicht mehr bloß auf Zehntel, sondern auf Hundertel genau sich „als ein vorläufiges Geschenk der Wissenschaft schon hier zu erbitten“. Um dann auch die zwischen seine Musterdreiecke „zwischenfallenden Dreiecke“ berechnen zu können, muß sich Herbart aber auch noch die Tangens- und Sekans-Werte wenigstens für die einzelnen Winkelgrade von 45° bis 90° bei der Wissenschaft ausbitten, und er gelangt und ebenso seine angestrengten Schüler gelangen auch so nur durch ziemlich umständliche Einschiebungsrechnung zum gewünschten Ergebnis. Während Herbart auf diese Weise genötigt ist, seinen Schülern Tabellenwerte in die Hand zu geben, hält er trotzdem die Forderung aufrecht, daß sie ihr Gedächtnis dauernd mit den oben erwähnten Grundzahlwerten belastet halten: „das ABC der Anschauung kennt nur seine, in jedem Gedächtnis tragbare und nie im Leben zu verlierende Tafel, nach der bisher gerechnet ist“!

Herbart will weiterhin auch einen „Gebrauch des ABC der Anschauung“ übermitteln. Er findet diesen wie in der Himmelskunde, so auch in der Erdkunde, bei der es nach seiner Meinung (Jahr 1802!!) nicht so sehr auf „die stets veränderlichen Grenzen der Länder und Provinzen“ ankommt, sondern wesentlich auf die Lage von Punkten (Hauptstädten, Häfen). Und so „fange der Lehrer bei jeder neuen Landkarte, die er vorlegt, damit an, die drei wichtigsten Orte auf derselben zu nennen und zu zeigen. Sie werden ein Dreieck bilden“. Und dieses soll nun nach allen Regeln der Kunst behandelt, d. h. gezeichnet und berechnet werden, und zu ihm sollen sich andere fügen — „und man wird durch dies alles den Fortgang des geographischen Studiums nicht nur nicht aufhalten, sondern dessen Erfolg beträchtlich beschleunigen“.

Überblickt man Herbarts weder aus der Unterrichtspraxis hervorgegangenen, noch auch von ihm in einer solchen erprobten, sondern nur theoretisch aufgestellten Versuch einer geometrischen An-

schauungslehre und vergleicht man ihn insbesondere mit Pestalozzis Bestrebungen und praktischen Ausführungen, so ist zunächst die Selbständigkeit Herbarts in der Erfassung und in der Begründung der Aufgabe seinem Vorgänger und Mitstrebenden gegenüber festzustellen, es ist seine Verallgemeinerung und zugleich Vertiefung der Sache ebenso anzuerkennen wie seine Forderung steter Selbsttätigkeit des Schülers, nicht minder auch das in Klarheit und Sicherheit des methodischen Ganges erfolgende stufenmäßige Fortschreiten vom sinnlichen Wahrnehmen zum verständigen Erfassen und Verwenden. Aber Herbart, doch wohl seine eigene Geistesart und Befähigung wie Neigung gewissermaßen für alle voraussetzend, geht zu sehr ins Abstrakte, er mutet seinen zehnjährigen Zöglingen eine Fähigkeit der Abstraktion zu, die sie i. a. nicht haben, er setzt schon für die Durcharbeitung seiner Musterdreiecke — die ohnehin nur ungenaue Ergebnisse zeitigt —, gar erst für deren Anpassung an die wirklich vorkommenden Dreiecke ein viel reiferes Urteilsvermögen voraus, er belastet das Gedächtnis der Schüler zu stark und verlangt von diesen in Hinsicht auf das viele sonst zu Erlernende fast Unmögliches. Dann aber macht Herbart an die Geduldübung von Lehrer und Schülern doch wohl zu hohe Anforderungen: die gewiß „an sich nicht reizenden Formen“ der Dreiecke (II, 163) in der von ihm gewünschten Ausführlichkeit und in fast unendlicher Wiederholung durchzuarbeiten, müßte die Geduld, fast möchte man sagen, von dazu verurteilten Sträflingen überschreiten. Herbart fühlt das selbst, wenn er (II, 146) „eine zu frühe Ermüdung der Aufmerksamkeit bei den Kindern“ erwartet; aber dagegen würde auch Herbarts Vorschlag nicht helfen: „man erlaube weder sich noch den Kindern, die Geduld eher zu verlieren, bis die völlige Einsicht hervorspringt“ (II, 146). Schließlich fordert Herbart als Hauptsache gar nicht die eigentliche Pflege der Anschauung und des Sinnes für Raumverhältnisse, sondern die Einzwängung der Raumgestaltungen in sein abstraktes Zahlen- und Tabellenwerk. So ist einerseits die allgemeine Ausführbarkeit seines Planes und ein praktischer Erfolg davon kaum zu erwarten, anderseits, auch wenn es hierum besser stände, wäre aus den angeführten Gründen eine Einführung in die Schulen und in den Massenunterricht abzulehnen.

Herbart hat seinen geometrischen Anschauungsunterricht nur auf dem Papier dargelegt, im Unterricht hat er ihn nicht erprobt. Doch ist die Nachricht überliefert (I, 54), daß sein ABC der Anschauung von einem Göttinger Mathematiklehrer „mit der ausgezeichnetsten Geschicklichkeit in Ausübung gesetzt“ worden sei — mit welchem Erfolg, steht freilich nicht angegeben. Herbart selbst bittet um Prüfung seiner Vorschläge und wünscht bezügliche Versuche im Unterricht (I, 282): „Das ABC der Anschauung, wie es hier in die

Welt geschickt wird, ist nur noch ein armer Fremdling, der gar manche gute Gabe, aus vielen Händen, sich auf sein ehrlich Gesicht erbitten muß."

13. Während so Pestalozzis Art des Vorgehens grundsätzliche Zustimmung fand, freilich auch zugleich den ersten Angriff erfuhr, gingen Pestalozzi selbst und seine Anhänger unentwegt auf der eingeschlagenen Bahn weiter. Herbart hatte gesagt (1804): „Pestalozzi versuchte sich ohne System". Dieses „System" sollte aber doch bald ausgearbeitet vorliegen in dem zweibändigen dreiteiligen Werk (Nr. 2) von Pestalozzis Schüler und langjährigem Gehilfen und Anstaltslehrer Joseph Schmid: „Die Elemente der Form und Größe (gewöhnlich Geometrie genannt) nach Pestalozzis Grundsätzen bearbeitet" (1809 bis 1811).

Dieses Werk geht davon aus, daß „die gewöhnliche Geometrie (nach Euklid) nicht auf die Entfaltung der menschlichen Anlagen berechnet" sei; sie „setze voraus, der Mensch sei schon entwickelt und gebildet", „das Wesen der Geometrie, so alt es sei, habe als Bildungsmittel der Menschennatur kein Verdienst, freylich aber nicht, weil das Wesen des Bildenden nicht darin lag, sondern weil es die Menschen nicht darin suchten".

Schmid glaubt nun, seinem Meister folgend, das „Wesen des Bildenden" darin zu finden, daß er zunächst (I, S. 1—160) eine „Anschauungslehre der Form und ihrer Verhältnisse" entwickelt, darauf (I, S. 160—376 und II, S. 1—125) die „Größen-Lehre der formellen Anschauung" behandelt, um schließlich im dritten Teil „Zahl und Form wieder zu vereinigen" in Gestalt der Anwendungen, d. h. in der Aufstellung von Lehrsätzen und Zeichenausführungen. Der Lehrgang ist bestimmt für Kinder vom 7. oder 8. Lebensjahr ab, und sie sollen „diesen Teil der Bildung bis ins 12. oder 13. Jahr vollenden". Der Lehrgang will anfänglich nur Gebilde der Ebene, dann erst Flächen und nachher Körper behandelt wissen, und zwar stets zuerst hinsichtlich ihrer Form und dann ihrer Größe.

Die Behandlung der Formverhältnisse möge sich aus der hier wiedergegebenen ersten Figurentafel ergeben (S. 27). Der Lehrer zeichnet und benennt, läßt nachsagen und nachzeichnen, und in steter Wechselrede werden Punkt und Gerade behandelt (A, Nr. 1—6), dann „das Gleich- und Ungleichlaufen" von zwei und mehr Geraden (Nr. 7—10), darauf die „Verbindung des Verhältnisses des Gleichlaufens und der Richtung", dann die „Verbindung des Verhältnisses des Ungleichlaufens und der Linien in einer Richtung", darauf die „Verbindung des Verhältnisses des Gleichlaufens, Ungleichlaufens und der Linien einer Richtung" Weiterhin kommt (B) die „Vereinigung der Linien", d. h. ihr Schneiden in Betracht, ferner (C) werden „die Enden der

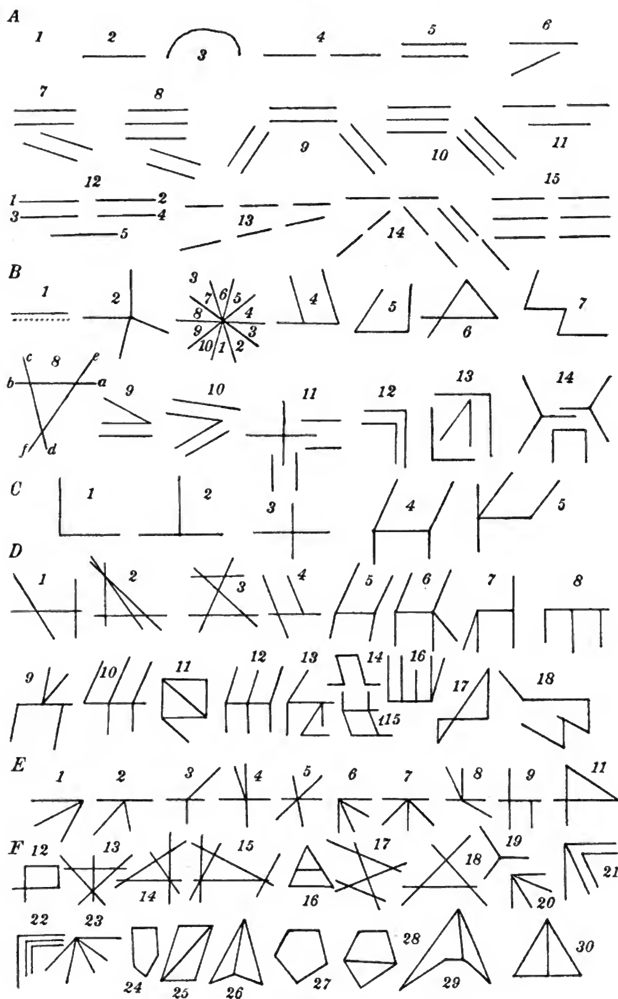

A
1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11
12 1 2 3 4 5
13 14 15
B
1 2 3 4 5 6 7
3 7 6 5 8 4 9 3 10 1 2
8 c e b a f d
9 10 11 12 13 14
C
1 2 3 4 5
D
1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14 16 17 18 115
E
1 2 3 4 5 6 7 8 9 11
F
12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
22 23 24 25 26 27 28 29 30

Fig. 4.

Linien in und außer dem Scheitelpunkte", auch (D) das „Durchgehen der Linien durch die Scheitelpunkte" untersucht, ferner (E) „die Anzahl der Winkel" und (F) die der Ecken, die entstehen u. s. f. Auf die Formenlehre der geraden Linien läßt Schmid die der krummen, dann die der geraden und krummen Linien folgen, darauf die der Flächen, und darnach erst habe die Größenlehre einzusetzen.

Betreffend die Reihenfolge, so „werden in der Formenlehre zuerst alle Verhältnisse, die mit unvereinigten Linien möglich sind, aufgestellt, darauf werden die Arten ihrer Vereinigung durchgeführt, und endlich werden die Ergebnisse aufgesucht, die durch ihre Vereinigung entstehen. Nachdem so alle Gesichtspunkte, die bei zwei Linien anfangen, erschöpft worden, nimmt man (drei, vier und) eine größere Anzahl Linien und führt wieder die gegebenen Punkte auf obige Weise durch".

Der richtige Gedanke allseitiger vergleichender Betrachtung und lückenlosen Fortschreitens erscheint so bei Schmid in schrecklich breitspuriger und auf die Dauer gewiß recht langweilender Weise ausgeführt. Und die Sache mag kaum erfreuender geworden sein bei den verlangten oftmaligen Wiederholungen: „diese Formen, verlangt er, müssen dem Kinde tief in der Seele sein vollendetes Eigentum werden, sie müssen durch vollkommen genugsam wiederholte Anschauung seiner Einbildungskraft unauslöschlich eingeprägt werden", ja sogar „sie müssen in ihm zum vollendeten Mittel seiner diesfälligen Selbständigkeit und Selbsttätigkeit erhoben werden". Zu solchen Übertreibungen führt der heilige Eifer!

Aber Schmids Werk fand große Verbreitung und Verwendung, wenn auch die zum Teil übergroße Breite und mitunter Flachheit des Buches getadelt wurde. Diesterweg nennt (1822) „die Methode, in der es lehrt, vortrefflich" und das Buch „originell und geistvoll". Einsichtigere erkannten bald das Einseitige, Dürftige und Inhaltsarme des Unterrichtsbetriebes von Pestalozzi-Schmid und ihrer vielen nicht geschickteren Nachahmer. So verurteilt der nachher noch zu erwähnende J. J. Hoffmann (1815) „jene endlosen Kombinationen räumlicher Gegenstände, welche fürs erste zu nichts Lehrreichem führen, und sodann noch die Tätigkeit des Schülers erschlaffen, anstatt dieselbe verhältnismäßig anzuregen und zu stärken". Und der ebenfalls noch wegen seiner Bemühungen um den geometrischen Anfangsunterricht anzuführende Seminardirektor W. Harnisch bezeugt uns (1821), daß „durch die Josef Schmidsche Formen- und Größenlehre, und mehr noch durch Josef Schmids Schüler, die sich von Ifferten aus weit verbreiteten, der neue Unterricht in der Raumlehre in viele Schulen gebracht, bei vielen Schülern angewandt wurde. Die Sache ward mit Eifer und Liebe getrieben. . . . (Gewisse) Leute nahmen unbedingt den Josef Schmid an und lehrten und lehren noch darnach.

Das war denn freilich oft zum Erbarmen, zumal wenn man es so in die Dorfschulen einführte: es war jenes widrige Linienkombinationen-Treiben eine eitle Kraftanstrengung, ohne Zweck, ohne Ziel, ohne Beziehung zur Wissenschaft und zum Leben". Aber trotz dieses Verdammungsurteils über die Form erkennt Harnisch den Geist jener Bestrebungen vollauf an und rühmt ihn: freilich hätten Pestalozzis Maßverhältnisse und Schmids Form- und Größenlehre „selbst beim besten Gebrauch zu nichts führen können"; beider Leistung „war an sich wenig, aber sie führte zu Vielem. Sie war wenig, weil sie nur einen kleinen Teil der Raumlehre selbst umspannte, ohne innere Gesetze eine übergroße Masse lieferte, und für das bürgerliche Leben keine Bedeutung hatte. Sie war viel, denn sie bekümmerte sich nicht um den ausgefahrenen schlechten Weg, dessen Unzweckmäßigkeit wegen der Gewohnheit Keiner sah; sie ging vom Schüler aus und nicht von der Wissensmasse, und beabsichtigte Kraftbildung — etwas ganz Neues in jener Zeit".

14. Und dieses Neue fand Anklang: eine ganze Reihe von Büchern [1]) der neuen Richtung, mehr oder minder geschickt abgefaßt, trat in den zwei ersten Jahrzehnten des neuen Jahrhunderts ans Licht, und sie bezeugen, daß man immer erneut bestrebt war, den Pestalozzischen Grundgedanken praktisch zu gestalten. Neben der großen Menge von Nachmachern gingen auf dem neu betretenen Weg einsichtige begeisterte Männer weiter und suchten andere, neue Wege zum winkenden Ziele einzuschlagen. So hat [2]) „der bekannte Freiheitskämpfer Friedrich Friesen († 1814), ein geschickter Feldmesser

1) Es seien hier nur einige nach der Zeitfolge ihres Erscheinens angeführt:
1803: Nilson, Gründliche Anleitung zu geschickter Führung des Zirkels, Lineals und Dreiecks. Augsburg.
Ide, Anfangsgründe der reinen Mathematik; 2. Teil (Geometrie). Berlin.
1809: F. W. Fischer, Die Vorbereitung zur reinen Geometrie. Brandenburg.
1811: Hänle, Abriß der Geometrie und Mechanik. Frankfurt a. M.
1812: Ladomus, Geometrische Konstruktionslehre, 1. Teil. Freiburg.
Ladomus, Geometrische Konstruktionslehre, 2. Teil. Karlsruhe.
v. Türk, Leitfaden zur Behandlung des Unterrichts in der Form- und Größenlehre. Berlin und Leipzig.
Hänle, Die Geometrie als Geistes-Gymnastik (1. Teil). Hadamar.
1813: Zimmermann, Anfangsgründe der Geometrie. Berlin.
1814: Zeller, Elemente der Gestalt. Berlin.
1815: Pöhlmann, Die ersten Anfangsgründe der Geometrie, als Stoff zu Denk- und Sprachübungen benutzt. Erlangen.
1818: Mathias, Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Größenlehre (2. Teil: Geometrie). Magdeburg.
König, Die mathematischen Vorübungen. Münster.
1820: Grüson, Geometrie nach Erzeugung der Begriffe. Berlin.
Schaffer, Lehrbuch der phoronomischen Geometrie. Oldenburg.

2) Nach W. Harnischs Bericht (Vorrede S. XV zur Raumlehre von 1821).

und Kartenzeichner, als Lehrer an der Plamannschen Anstalt in Berlin (1809 bis 1812), während man in Ifferten unter Pestalozzi noch unbedingt Josef Schmid folgte, einen Unterrichtsweg in der Raumlehre eingeschlagen, der wahre Kraft erweckte, zur richtigen Einsicht in die Raumverhältnisse führte und zur Ausübung der Kunst leitete". Leider ist mir über Friesens Weg und Lehrgang nichts näheres bekannt.

Mit einem Versuch der Abänderung des Schweizer Lehrganges trat 1815 der (auch durch eine Parallelentheorie und durch seine Zusammenstellung von 35 Beweisen für den pythagoreischen Lehrsatz bekannte) Aschaffenburger Lyzeumsdirektor J. J. Ignaz Hoffmann hervor.[1]) Für das eigentliche Knabenalter von 8 bis 14 Jahren, sagt er, gebe es noch keine Geometrie als strenge Wissenschaft; auf diese müsse erst vorbereitet werden. Das beste Vorbereitungsmittel liege in der Ausbildung des natürlichen Anschauungsvermögens. Aber diese dürfe nicht auf ein „gedankenloses Spielen mit Linien und Flächen angelegt sein, welches das Reingeistige zum blinden Mechanismus herabwürdigt, sondern der Zögling soll vielmehr eine Gewandtheit erhalten, solche Anschauungen im Raume mit Schnelligkeit, Leichtigkeit und Sicherheit zu übersehen". Trotz seiner Betonung der Raumanschauung geht aber auch Hoffmann wiederum von der Betrachtung von Punkt, Linie und Linienverbindungen aus und verteilt seinen Stoff auf vier einander folgende Kurse.

Gemäß dem Gang des ersten Kurses hat der Lehrer (S. 31, Fig. 5) jeweils selbst auf die „von Oben nach Unten in drey Gefache geteilte Schultafel" zunächst jedesmal drei zu einer Gruppe gehörige Figuren zu zeichnen, wie solche hier den Figurentafeln des Verfassers verkleinert nachgebildet sind; die Schüler haben diese Figuren bloß „sehr aufmerksam zu beschauen" und die vom Lehrer mitgeteilten Namen in steter Wiederholung zu lernen, auch umgekehrt zu den genannten Namen die betreffenden Figuren zu zeigen. Eine kleine Abwechslung und ein Zwang zur Auffassung nach Lageänderung und trotz dieser wird dadurch geboten, daß die Schultafel um einen in ihrer Mitte angebrachten Zapfen viertels, halb und ganz umgedreht werden kann. „Zweckmäßig ist es, wenn jeder Schüler die auf der Schultafel erblickten Zeichnungen entweder in einem besonderen Hefte oder auf einer Schiefertafel selbst nachbildet." Erklärungen werden keine gegeben; aber „Alle sollen das Lehrbuch besitzen, weil das Nachlesen des Vorgetragenen durchaus erforderlich ist". — Der zweite Kursus, mit Fig. 47 beginnend, wiederholt und erweitert den zuvor behandelten Stoff (Winkel um einen Punkt, Dreieck, Vier- und Vieleck, Kreis) durch Beschauen und vergleichendes Besprechen von weiteren 18 solchen Figurengruppen.

1) Nr. 3, mit 7 Steintafeln. [Darin 1. Kursus S. 9—65, der 2., 3., 4. Kursus bzw. von S. 65—95—143—171.]

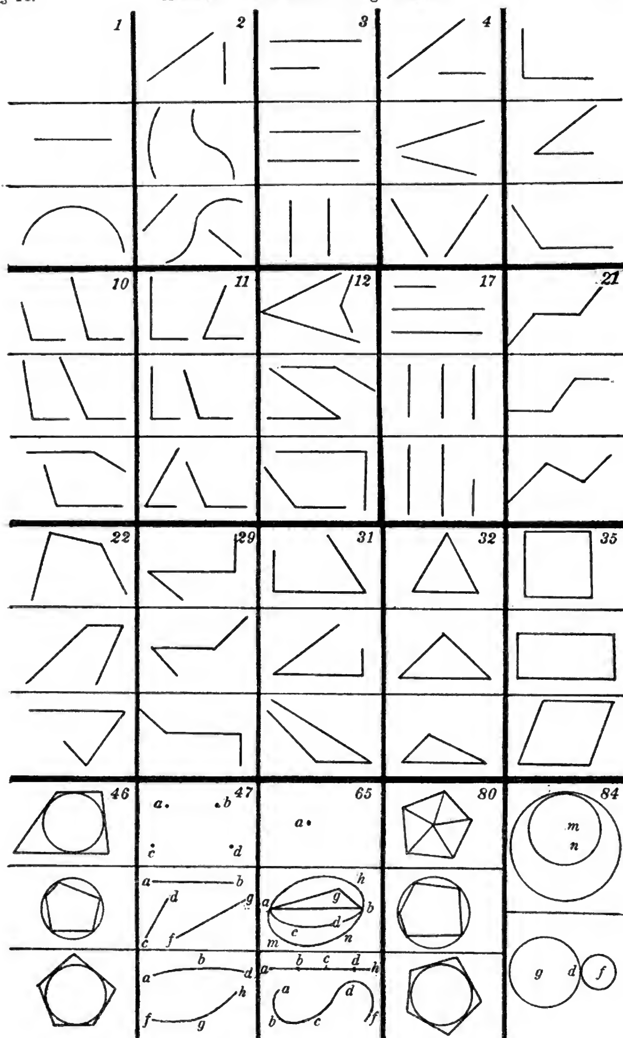


Fig. 5.

Auch jetzt wird noch von Erklärungen abgesehen; aber als neu Hinzukommendes „wird der Zögling zur (Buchstaben-)Bezeichnung der ihm nun bereits bekannt gewordenen Anschauungen des ersten Kursus angeleitet". — „Im dritten [mit der Figurengruppe 65 beginnenden] Kurs wird das Gebiet der geometrischen Elementar-Anschauungen gänzlich abgeschlossen, und der Schüler wird allmählich an scharfe Bestimmung der Begriffe gewöhnt." Hierbei wird auch Wesen und Art der Fläche gestreift, und es wird dabei „als ratsam erklärt, kleine Körpermodelle vorzuzeigen, um sowohl die Anschauung als den Begriff von krummen Flächen vollkommen klar zu machen". — Der vierte Kursus endlich „handelt von den mathematischen Abkürzungszeichen, von den Grundsätzen und Forderungen, und endlich von dem Begriffe, den Hauptttheilen und der Methode der Mathematik", und damit ist nach des Verfassers Meinung die Einführung in das eigentliche Gebiet der Geometrie genügend vorbereitet.

Als zweckmäßigste Stelle für solche Vorbereitung möchte Hoffmann entweder (1815) die höchste Klasse vor Besuch des Gymnasiums gewählt sehen oder (1818) innerhalb des Gymnasiums „jene Klasse, mit welcher im nächstfolgenden Schuljahre die eigentliche Geometrie begonnen wird", und er hält „bei drey Wochenstunden ein Jahr für hinreichend".

Nach solcher Vorbereitung sollen dann „die Elementarlehren der Planimetrie vorgetragen werden", dann erst soll die Körperlehre folgen, und auch diese vorbereitet durch eine „stereometrische Anschauungslehre". Letztere habe ebenfalls in drei Stufen zu erfolgen derart, daß die erste wiederum nur das Beschauen, nicht Erklären von (35) Raumgebilden behandelt, die zweite in Sach- und Worterklärungen deren Begriffe übermittelt, während der dritten Stufe als Aufgabe zufällt, „körperliche Gestalten an Zeichnungen in der Ebene zu erkennen und mit Buchstaben bequem zu bezeichnen".

15. In einer auf Schmids Grundgedanken weiterbauenden, sonst eigentümlichen Weise hat J. G. Graßmann (vom Stettiner Gymnasium) den in die Raumlehre einführenden Unterricht zu gestalten gesucht. Zunächst für die Einrichtung von Armenschulen bestimmt, dann auch in Privatschulen und in mehreren Stadtschulen der Provinz sowie in Volksschulen und im Gymnasium zu Stettin erprobt, „da es wohl keinem Zweifel unterworfen ist, daß die Raumlehre (Geometrie) mit in den Kreis der Bildungsmittel für die Jugend aller Stände gehört", gliedert sich Graßmanns Versuch in zwei Hauptteile, in eine „ebene räumliche Verbindungslehre" und in eine „ebene räumliche Größenlehre" (Nr. 4).

In dem Bestreben, „den Schüler stets in die Mitte der Untersuchung zu stellen" und ihn zu befähigen, „vorwärts zu blicken und

schon im voraus zu bestimmen, was nun folgen müsse", betreibt auch Graßmann eingehend die möglichen Zusammenstellungen der Grundgebilde. Man erkennt hierin die Nachwirkung und den starken Einfluß der bekannten kombinatorischen Schule. Graßmann will aber Schmids Fehler vermeiden, daß nämlich „die Verbindungen (Kombinationen) bald so weitläuftig und verwickelt werden, daß man es aufgeben muß, sie weiter zu verfolgen, ehe man zu dem Gesetze des Fortgangs gelangt"; da so nämlich „der Schüler in die Linienverbindung sich so tief verstrickt, daß ihm keine Hoffnung bleibt, sich durch die immer größer werdende Verwirrung durchzuarbeiten", so legt Graßmann „überall die unendliche Linie der Construktion zum Grunde, wodurch nicht nur jene endlose Weitläuftigkeit vermieden, sondern auch alle Willkühr ausgeschlossen und die Gesetze des Fortgangs der Verbindungen leicht und klar anschaulich werden".

So geht er denn von der Richtung und von der Verschiedenheit der Richtungen von Geraden aus und läßt in gemeinsamer Forschungsarbeit von Lehrer und Schülern die dabei möglichen Zusammenstellungen untersuchen.

In einem ersten Abschnitt der „Verbindungslehre" werden so gleich- und ungleichlaufende Geraden, die möglichen Verbindungen der letzteren und das Aufsuchen ihrer Schnittpunkte abgehandelt, dann das Hindurchgehen von Geraden durch einen Punkt, weiter die Verbindung von gleich- und ungleichlaufenden Geraden, ferner die Zerfällung von Geraden in Strahlen, die Verbindung von Strahlen zu Winkel und Winkeln, deren auftretende Anzahlen, endlich deren Auftreten an Verbindungen von Geraden.

In einem zweiten Abschnitt wird das Verbinden gleich- und ungleichlaufender gerader Linien in Beziehung auf die dadurch entstehenden Seiten und Figuren betrachtet, es wird die Zahl der Strecken bei 3, 4, ... Schnittpunkten und die Verbindung der Figuren nach gemeinsamen Seiten und Winkeln untersucht sowie das Herausbilden neuer Figuren (Vierecke) aus einfacheren (Dreiecken).

Ein dritter Abschnitt zieht auch den Kreis und die einfachsten Verbindungen von Kreisen untereinander und mit Geraden in Betracht und läßt die entstehenden Figuren zur Kenntnis nehmen.

Man wird hiernach Graßmann recht geben, wenn er selbst sagt: „Mein Büchlein würde nicht unpassend den Titel einer geometrischen Combinationslehre erhalten haben, wenn ich diesem nicht den deutschen vorgezogen hätte."

Der zweite Teil von Graßmanns Schrift erschien sieben Jahre nach dem ersten unter, wie wohl zu beachten, geändertem Titel; er enthält die „ebene räumliche Größenlehre", für welche jener erste Teil „eine methodische Vorbereitung" war, für welche freilich Graßmann (2. Teil, S. V) „den nicht geringen Anspruch erhebt, darin die ersten

Elemente einer bisher von niemand beachteten und also neuen mathematischen Disziplin zu geben; denn was die Pestalozzische Schule unter dem Namen der Formenlehre aufgestellt hat, trägt, meinem Urtheile nach, auf keine Weise einen wissenschaftlichen Charakter, und ist auf ein ganz anderes Ziel gerichtet."

Nach einer Reihe von „Vorübungen" über die Größe von Strichen (-Strecken) und über die an Strecken durchzuführenden vier Grundrechnungsarten (— hierbei Dividieren zuerst als Teilen, dann als Messen aufgefaßt —) sowie nach „Übungen des Augenmaßes" und nach Einführung des Wesens von Verhältnis und Verhältnisgleichung behandeln die fünf Abschnitte des zweiten Teiles nacheinander die Größenlehre der Winkel (bis zu denen der gleichwinkeligen Vielecke), der Seiten, der Winkel und Seiten in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit (bei einer Figur und dann für mehrere Figuren = Ähnlichkeit), der Flächen und die Lehre vom Kreis; sie geben hierin den üblichen Inhalt der ebenen Geometrie. Ein Anhang von 21 Seiten ist den Grundzügen der Körper-Größenlehre gewidmet.

In bezug auf das Wesen seines Verfahrens spricht sich Graßmann dahin aus (2. Teil, S. VII f.), daß Euklidische Geometrie „eine gewisse Reife des Verstandes voraussetze und daher ... für die unteren Klassen der Gymnasien ... noch nicht gehöre"; daß aber „die Kraft der Construktion sich schon im zartesten Alter üben und entwickeln" lasse. „Die Kinder müssen alles durch Anschauung und nicht durch den Begriff haben. ... Es bedarf wohl kaum des Zusatzes, daß hier unter Anschauung nicht die äußere sinnliche, sondern die innere, die Anschauung der Thätigkeit des construirenden Geistes oder die Anschauung der inneren Construktion gemeint sei. Jene ... kann gebraucht werden, die innere Anschauung zu wecken und festzuhalten; sie ist ein unwesentliches, aber oft unentbehrliches methodisches Hülfsmittel."

16. Der von Hoffmann vorgeschlagene und erprobte Lehrgang für den vorbereitenden geometrischen Unterricht (Nr. 3, auch Nr. 5) erhob sich gewiß durch leicht erkennbare Vorzüge über den vielbefolgten Schmidschen; aber auch ihm haften die Mängel an, die in der eintrichternden Art der alten Methode, im gar zu schablonenhaften Trennen der drei „Kurse", im völligen Fehlen jeglicher Anwendung, nicht zum letzten im Ausgehen von Punkt und Strich begründet sind. Und wenn auch Graßmann durch bessere innere Verschmelzung der Lehrstoffteile und durch mehr wissenschaftlichen Sinn über seine genannten Vorgänger hinausgelangte, die Vorliebe für die „kombinatorische Methode" und das Ausgehen von der Geraden und den ebenen Gebilden bedeuteten immer noch einen Mangel im wünschenswerten Gestalten dieses Unterrichtszweiges.

Eine grundsätzliche Besserung trat erst ein, als dieser Elementarunterricht aus der „Rückkehr zur Natur“ frischeres Leben und neue Kraft gewann. Und diese neue Anregung, die Hinlenkung dazu, den Ausgang von der Betrachtung und Vergleichung von Körpern aus zu nehmen, anstatt der abstrahierten Gebilde Punkt und Gerade den sinnlich faßbaren Körper als Grundlage zu wählen, diese Anregung scheint man dem Geologen und Pädagogen Karl von Raumer zu verdanken. Durch Hauy und Weiß war die Steinkunde, im besonderen die Kristallkunde erst zu einer Wissenschaft geworden, und durch sie angeregt hatte Raumer 1820 ein „ABC-Buch der Kristallkunde“ veröffentlicht, dessen liebevolle Vertiefung in die Welt der Formen vielfach zu deren Studium aneiferte und zugleich „ein neues Feld für die Raumlehre als Unterrichtsgegenstand eröffnete“.

Raumer selbst hat 23 Jahre später (im dritten Teil seiner Geschichte der Pädagogik vom Jahre 1843, S. 189) eine recht gesunde Auffassung ausgesprochen über die Notwendigkeit einer dem Euklidstudium vorauszuschickenden Unterweisung auf Grundlage der Anschauung. „Daß dem euklidischen demonstrativen Gang im Unterricht etwas vorangeschickt werden müsse, Anschauliches, Einleitendes, darüber sind in unserer Zeit viele Mathematiker einig. Besonders sah man die durch Pestalozzi und seine Schule aufgekommene Formenlehre für eine Propädeutik der Geometrie an; in ihr sollte die Anschauung, in der Geometrie der Verstand vorwalten [nach Diesterweg, Wegweiser, 2. Auflage, 2. Teil, S. 188 ff.]. Allein mit Körpern begann man nicht, sondern dem bis zur Karrikatur getriebenen Elementarisieren gemäß mit dem Punkt. Darauf ging man zu Linien über und verlor sich in zahl- und ziellose Kombinationen. Endlich kam man zu Flächen; von Körpern war aber in der bekannten Schmidschen Formenlehre, der Vorläuferin so vieler anderen, so gut als nicht die Rede. — Spätere fühlten wohl die Notwendigkeit, mit einem Körper anzufangen, etwa mit dem Würfel, aber einzig, um an demselben den Abstraktionsprozeß zu zeigen, durch welchen man vom Körper zum Punkt gelange. Sobald sie dies in der Kürze getan, gingen sie meist sogleich zum Kombinieren von Punkten, Linien usw. und zu anderen Operationen über, ... und es war wieder das Vorige. ... Ich meine, der geometrische Unterricht solle nicht mit so kurzer Analyse eines oder des anderen Körpers in seine geometrischen Elemente, vielmehr mit genauer, ausdauernder Betrachtung vieler mathematischer Körper beginnen.“ Und auf seine eigene hiernach aufgeworfene Frage: „welcher Körper?“ antwortet er sofort, daß man am besten die Kristallformen als solche Körper wählen solle.

17. Den Grundgedanken seiner Auffassung hatte Raumer, wie gesagt, schon 1820 in seinem ABC-Buch der Kristallkunde gegeben.

Und eben durch dieses Buch sah sich der nachmalige Seminardirektor W. Harnisch veranlaßt, den Körper zum Ausgang eines vorbereitenden geometrischen Unterrichtes zu nehmen. Mit Friesen und Jahn war Harnisch 1810 bis 1812 an der nach Pestalozzischen Gedanken geleiteten Plamannschen Anstalt in Berlin als Lehrer tätig gewesen, und „der Umgang mit Raumer, so sagt er selbst, erweiterte in mir die Ideen, welche durch meinen seligen Freund Friesen, in Absicht der Bearbeitung der Raumlehre, in mir entstanden waren". Diesen Ideen verlieh er Ausdruck in seinem Buch (Nr. 6) vom Jahre 1821: „Die Raumlehre oder die Meßkunst, gewöhnlich Geometrie genannt, mit gleichzeitiger Beachtung von Wissenschaft und Leben."

Im Gegensatz zur bisherigen „Beschränkung auf Strich- und Flächen-Anschauungen, da doch diese erst durch die Körper-Anschauungen einen wahren Hintergrund erhalten", stellt Harnisch die Körper an den Beginn seines Unterrichtes. Dieser verlangt das Vorhandensein von fünf aufrechten Prismen und vom Kreiszylinder („Säulen oder Kante"), von fünf Pyramiden und vom Kreiskegel („Spitzsäulen oder Spitze"), dann vom regelmäßigen 4-, 6-, 8-, 12-, 20-flach und der Kugel („Flache"). „Einige dieser Körper muß der Lehrer mehrfach besitzen, und zwar von verschiedener Größe, in verschiedenen Farben, und womöglich auch aus mannigfaltigen Stoffen." „Der Lehrer fragt zuerst nach den Namen von allerlei Gegenständen in der Stube und an den Kindern, bringt darauf allmälig einen Körper nach dem andern vor, sagt den Namen, fragt darnach, und läßt die Farbe und Masse angeben. ... Bald merken die Kinder, daß es auf die Form ankommt." Unter bezüglichen Fragen über Stehen und Rollen dieser Körper ergibt sich deren Ordnenlassen in drei Reihen. Es folgt das „Nachmachen und Benennen der Grundflächen": letztere „hat der Lehrer alle vorräthig in der Schule, und womöglich mehrfach und von verschiedener Größe, gefertigt aus Pappe oder Holz, aus Blech oder Hornmasse". „Der Lehrer vertheilt die Flächen unter die Schüler; jeder empfängt mit der Fläche den Namen derselben, und legt die Fläche auf seine Tafel, um sie zu umziehen, und so sie also, dekkend, abzuzeichnen." Unter stetem Wechsel der Flächen ergeben sich „mancherlei Fragen und Sinnenaufklärungen", und nach Durchzeichnen aller werden sie wieder an den Körpern aufgewiesen und durch Wiederholung eingeprägt, sowie an den Gegenständen des Schulzimmers aufgesucht. „Unterhaltender und auch noch belehrender ist es, die Schüler dieselben Flächen mehrmals neben einander, oder auch quer über einander, oder ungleichartige Flächen neben und über einander legen und abzeichnen zu lassen."

Darauf folgt das „Auffassen und Benennen der Grundrichtungen", diese allein und zueinander, dann die Arten der Winkel, hierauf „das Betrachten und Machen der Grundflächen", gefolgt vom „genaueren

Betrachten der Grundkörper". Danach kommt reichliches Zeichnen der üblichen Grundkonstruktionen, auch von dem Kreis ein- und umgeschriebenen Vielecken sowie das Erkennenlassen der kristallographischen Übergänge der verschiedenen Körper ineinander durch Entecken und Entkanten.

Auf den hiermit gekennzeichneten Inhalt des ersten Teiles („Anschauungen und Darstellungen") läßt Harnisch im zweiten Teil „Vergleichungen und Messungen" und im dritten „Verhältnisgleichungen" durchführen, d. h. Betrachtungen und Anwendungen der Ähnlichkeit ebener und räumlicher Figuren.

Man wird zugeben, daß Harnisch mit seiner neuen Art des Vorgehens auf gutem Wege war, wenn freilich so der Selbsttätigkeit des Schülers noch nicht genügend Rechnung getragen ward. Aber Harnischs Lehrgang fand in den anderthalb Jahrzehnten zwischen dem Erscheinen der ersten und der zweiten Auflage (1821, 1837) Beachtung und mehrfach Nachahmung, insbesondere war dies der Fall mit seinem „Anfangen mit den Körpern statt mit den Strichen" („was meine Raumlehre zuerst in die Schulwelt brachte" — berichtet er S. 37 der Vorrede).

18. Im vorstehenden wurden die einschneidend neuen Gedanken wiedergegeben, die Pestalozzi der Welt geschenkt hat und die weiterhin so gewaltigen Einfluß auf das gesamte Unterrichtswesen gewannen, die aber zunächst, und hier am stärksten, im elementarsten mathematischen Unterricht, zumal im geometrischen Anschauungsunterricht sich geltend machten. Die praktische Gestaltung jener Gedanken ließ freilich vieles, ja fast alles zu wünschen übrig; aber nach und nach ward in stets neuen Versuchen zur Gestaltung Besseres geleistet. Es schien mir wünschenswert, gerade die ersten Schritte oder Gehversuche auf diesem neuen Gebiete hier etwas ausführlicher darzustellen.

Man beachte aber wohl, daß alle die dargestellten Neuerungsvorschläge wesentlich privater Natur waren und als Meinungen einzelner in die Welt gingen, und daß die mancherorts durchgeführten Erprobungen des Neuen in der Schule wohl meist oder fast überall ebenfalls nur regem Eifer einzelner zu verdanken waren, zumal solcher, die sich in dem damals noch nicht so straff zentralisierten und von behördlicher Seite noch nicht so fest geregelten Unterrichtsbetrieb, selbstverständlich am ehesten in privaten Schulunternehmungen, noch freier zu regen vermochten. Aber die amtliche Welt hielt sich meist zurück, insbesondere war in den höheren Schulen, auf die es uns hier hauptsächlich ankommt, vom Einfluß Pestalozzischer Gedankengänge, so weit ich sehe, nichts zu verspüren — man blieb beim Alten und hielt einstweilen am Hergebrachten fest.

Wir haben oben (S. 13) gesehen, wie Chr. Wolf dem mathematischen Unterricht der höheren Schulen, d. h. der einzig vorhandenen Gymnasien (und Ritterakademien) einen fester umrissenen Begriff und Inhalt gegeben, auch die Bedeutung dieses Unterrichtes und selbst die Pflege der Anschauung, wenigstens theoretisch, gewürdigt hat. Aber an den damaligen, vielfach noch kaum staatlich organisierten und nichts weniger als einheitlich gestalteten Gymnasien herrschte, den allgemeinen Bestrebungen jener Zeit entsprechend, die Hauptforderung, praktisch Brauchbares zu lehren und zu lernen; man wollte vor allem brauchbare Beamte bilden. Bei weitem mehr als die Anerkennung der erzieherischen Bedeutung des mathematischen Unterrichtes war bis in den Beginn des 19. Jahrhunderts die Rücksicht auf seine Anwendungsfähigkeit im Leben der bestimmende Grund zu seiner Aufnahme in die höheren Schulen gewesen; aber auch unter diesem Gesichtspunkt stattete man jenen Unterrichtszweig mit allzu wenig Wochenstunden aus und überließ ihn freiwilliger Beteiligung, meist auch unter wenig oder gar nicht dazu vorgebildeten Lehrern.

Eine Änderung hierin trat erst mit den schweren Schlägen, mit den Wirkungen und Nachwirkungen der Napoleonischen Kriege ein, zudem zunächst nur in Norddeutschland, dem die übrigen Teile Deutschlands nur langsam und ziemlich spät nachfolgten. Schon vor dem Zusammenbruch des preußischen Staates (1806 bis 1807) hatte man die Erfolge der jugendlichen, zum guten Teil aus der Pariser polytechnischen Schule Monges hervorgegangenen französischen Offiziere vor Augen, und damals und weiterhin war das Vorbild des genial organisierten napoleonischen Staatswesens mit seinem mehr mathematisch-realistischen Beamtentum im Bewußtsein aller. Mit und nach der schweren Niederlage Preußens brach sich die Erkenntnis Bahn, daß der geistige Aufschwung von Volk und Staat wie durch eine Reihe einschneidender politischer und sozialer Neugestaltungen wesentlich auch durch eine tiefere wissenschaftliche Bildung des Menschennachwuchses zu erstreben sei. Diese Auffassung [1]) in Verbindung mit dem mehr und mehr vorschreitenden neuhumanistischen Geist der Schulleitung, daneben auch die neuen praktischen Forderungen des neuaufblühenden Beamtenstaates gaben den kräftigen Anstoß zu wirklichen und zu erhöhten Anforderungen an den mathematischen Unterricht. Freilich schoß der Eifer, die erkannte Lücke auszufüllen und das Heilmittel anzuwenden, weit über jegliches vernünftige und damals überhaupt erreichbare Ziel hinaus (1816). Bald kam denn auch der Rückschlag: die Anzahl 6 der Wochenstunden jeder Klasse ward auf 4 (in IV und III = 3) herabgesetzt und der Lehrstoff stark beschnitten;

1) König Friedrich Wilhelm III. am 10. August 1807: „Der Staat muß durch geistige Kräfte ersetzen, was er an physischen verloren hat."

bald nahm auch die Wertschätzung eines geordneten mathematischen Unterrichtes stark ab.

Der Ursachen für diese bedauerliche Erscheinung gab es mehrere. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß seit Anfang des 19. Jahrhunderts die sog. „naturphilosophische“ Richtung aufgekommen war, in deren Gedankenläufen z. B. Hegel aus Plato bewies (1800), daß es nur 7 Planeten geben darf, oder ein gewisser Buchwald in seinem mathematischen Lehrbuch (1818) zu der Erklärung gelangte[1]): „Die Raute ist der natürliche Feind des Kreises, der aus dem Gleichgewicht seiner Gegensätze gewichen ist.“ Weiter wirkte in gleicher Richtung der übertriebene Altphilologismus, der sich freilich mehr und mehr mit der Welt der Tatsachen in Widerspruch setzte, aber einstweilen noch die Herrschaft voll behauptete und recht ungern fremde Götter neben sich duldete. Stammt doch von J. Schulze, der fast drei Jahrzehnte lang in Preußen die Gymnasien und Universitäten geleitet hat, das dreiste Wort, in einer Zeile des Cornelius Nepos liege mehr Bildungsstoff als in zwanzig mathematischen Formeln. Ohnehin war der Neuhumanismus durchaus aristokratisch, die von ihm zu liefernde Bildung sollte und wollte keine allgemeine Volksbildung werden, sie sollte ausschließliches Eigentum bevorrechteter Menschen bleiben. Bei solcher Denkweise war für die Beschäftigung mit Formen und Zahlen, diesen Lieblingen des großen Proletariers Pestalozzi und seiner Nachfolger, wenig oder kein Raum. Bald kam als weitere störende oder den mathematischen Unterricht hemmende Ursache hinzu, daß dieser ähnlich wie das Turnen manchen als politisch verdächtig erschien[2]), ganz wie später (1851) durch den reaktionären Kultusminister v. Raumer in Preußen die Fröbelschen Kindergärten als sozialistisch und atheistisch verboten wurden.

19. Während so eine Gruppe von Ursachen zusammenkam, um allgemein den mathematischen Unterricht der höheren Schulen, d. h. der Gymnasien, zurückzudrängen, ihn betreffs seiner theoretisch-pädagogischen Bedeutsamkeit herabzuwürdigen und ihn praktisch in der Schulwertung allmählich mehr und mehr zu vernachlässigen, sorgten die Vertreter jenes Unterrichtes z. T. selbst dafür, daß sich nicht nur gegen ihr Tun und Treiben, sondern auch gegen ihren Lehrgegenstand selbst mehr und mehr Stimmen und kräftige Stimmen aus dem Fachlager selbst erhoben. Und besonders ward der vorbereitende geometrische Unterricht Gegenstand der Angriffe.

1) Nach Diesterweg (Leitfaden Nr. 7) S. 15.

2) Harnisch z. B. überliefert (S. XLVI seiner Raumlehre) die Nachricht, daß ein höherer „Staatsbeamter, unter den auf eine eigenthümliche Weise die Breslauschen Seminarien und Gymnasien zu stehen kamen, die Furcht hatte, die Raumlehre gehöre zu den umtrieberischen Künsten, weil der Schullehrer sie mißbrauchen könne bei Äkkervertheilungen, und dadurch Aufruhr erregen“!

Der Geometrieunterricht vor Pestalozzi war kaum ein Schulunterrichtsfach nach unserem Begriff: man beschränkte sich meistens entweder auf eine Sammlung von Vorschriften (Rezepten) über eine gewisse Zahl nützlicher oder interessanter Zeichen- und Berechnungsweisen, oder man begann nur mit Schülern reiferen Alters, deren Anschauungs- und räumliches Vorstellungsvermögen nicht richtig oder meist überhaupt nicht ausgebildet, ja verbildet war, und zu dessen neuer Belebung im weiteren Unterricht keine Versuche gemacht wurden, ja auch kaum mehr gemacht werden konnten, weil sie dem vorgerückteren Alter nicht mehr entsprechend gewesen wären. In doppelter Hinsicht hat hier die Pestalozzischule neuartig und segensreich gewirkt: der geometrische Unterricht wurde jetzt mit jüngeren, z. T. viel jüngeren Schülern begonnen, und man gründete ihn, mehr oder minder gut, auf Anschauung. Die Erkenntnis des Fortschrittes in solcher Neuerung rief nicht nur eine reiche bezügliche Literatur hervor, sondern sie weckte auch eine lebhafte und ausgedehnte praktisch pädagogische Tätigkeit. Aber hier machte sich dann auch bald die Kehrseite der Sache bemerklich, Überstürzung und Einseitigkeit durch Übertreibung des an sich richtigen Grundgedankens: man gab dem neuen „Fach", der geometrischen Formenlehre, eine ungebührliche Ausdehnung und man mißgestaltete ihren Betrieb, letzteres die naturgemäße Folge des ersteren Fehlers. Dieser stellte sich so ein, daß mehr und mehr das ganze Gebiet ebener und räumlicher Geometrie durchsucht wurde, daß man alle für die einzelnen Abschnitte nötigen Einleitungsübungen, alle Erklärungen, alle in den Beweisen zu verwendenden Grundsätze zusammenstellte, um sie in einem Flusse abzuhandeln oder um nachher trotzdem vielfach das Wahrscheinlichmachen anstelle des Beweisens zu setzen.

Gegen solche Theorie und Praxis erhob sich schon früh, in den 20er Jahren des 19. Jahrhunderts und später stärker, scharfer Widerspruch. Dieser fand seinen Rückhalt an dem Aufkommen, Vordringen und wenigstens in den amtlichen Schulen an dem vollen Sieg des viel berufenen „Grundsatzes von der formalen Bildung", durch den das Betonen des rein Wissenschaftlichen, das Zurücktreten oder Verschwinden der Anwendungen, dafür die Hinwendung zum mehr oder völlig Abstrakten und damit die einzige Behandlung rein euklidischer Geometrieform bedingt war. Der Stoffumfang, fast möchte man sagen, der Inhalt des Gelehrten trat zurück hinter der nun gestellten Haupt-, ja fast einzigen Aufgabe des mathematischen Unterrichtes, unbedingt für logische Strenge zu sorgen, vor allem logische Schulung zu erzielen sowohl durch die Einzelarbeit wie durch die (z. B. später 1834 in Preußen gestellte) Zielforderung, „klare Einsicht zu gewinnen in den Zusammenhang sämtlicher Sätze des systematisch geordneten Vortrages".

Hauptvertreter dieser strengen Richtung waren, um nur wenige Beispiele anzuführen, die Brüder Ohm, ebenso z. B. in Bayern Thiersch. Der ältere Georg Simon Ohm, der Physiker, veröffentlichte 1817 seine streng, ja ängstlich genau, aber auch ermüdend durchgeführten „Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie“, deren Beweise „dem pedantischen storchbeinigen Einherschreiten auf Stelzen verglichen“ werden (Diesterweg); der jüngere, Martin Ohm, verurteilte in seinen „kritischen Beleuchtungen der Mathematik und der Euclidischen Geometrie insbesondere“ (1819) überhaupt den ganzen damaligen Betrieb der Mathematik: „die ganze Wissenschaft der Arithmetik gleiche einem Schutthaufen“ und „das bisherige Studium der Mathematik tödte alle freie Geistesthätigkeit“[1]). Er forderte durchweg strenge Elementargeometrie für den ersten Unterricht und trat den Bestrebungen der Pestalozzianer mit Lebhaftigkeit entgegen (1817): ich „möchte hier die Beredsamkeit eines Demosthenes oder Cicero haben, um von unseren (nicht etwa bloß Gymnasien, sondern überhaupt) deutschen Schullehrer-Seminarien, Realschulen, Elementarschulen, Bürgerschulen überhaupt das so häufig herrschende Vorurteil verbannen zu können, als müsse man statt der Elemente einer wissenschaftlichen Geometrie geometrische Anschauungslehre, und statt einer fast alle geistigen Kräfte des Menschen übenden streng wissenschaftlichen Mathematik überhaupt nur einseitig und fast dürftig bildende Surrogate betreiben.... Hätten Pestalozzi oder Schmid es erkannt, wie eine wissenschaftliche strenge Mathematik zehnjährigen Kindern zugänglich und beliebt zu machen sei, so würde man nicht auf solche Abwege geraten sein.“ Und Thiersch, der bekannte Gründer strengst altphilologischer Schulen in Bayern, forderte (1826), „daß der geometrische Theil des Unterrichtes streng auf die Grundsätze und die Methode des Euklides gegründet werde“ (— nach Peters Nr. 8, S. 69 u. 80).

20. Gegenüber solchen Ansichten und Vorschlägen, die von einem vorbereitenden geometrischen Unterricht oder von einem eigentlichen Anschauungsunterricht nichts wissen wollten, und gegenüber dem jenen Ansichten entsprechenden landläufigen Unterricht zumal der Gymnasien behaupteten und verteidigten eine Reihe von Männern die Notwendigkeit und Durchführbarkeit eines derartigen Unterrichtes, und zwar eines solchen, der sich nicht einmal in gar zu engen Grenzen halten dürfe. Nur drei dieser Männer seien für diese Richtung der Schulmathematik hier angeführt: Dr. W. Harnisch (Nr. 6, 1821 und wieder 1837)[2]) und Dr. F. A. W. Diesterweg (Nr. 7 vom Jahre 1822), beide bezeichnenderweise Direktoren von Schullehrerseminarien, sowie Dr.

1) Nach Diesterweg (Nr. 7), S. 18. 2) Vgl. oben S. 36.

A. Peters (Nr. 8 vom Jahre 1822), Mathematiklehrer an der bekannten Blochmannschen Erziehungsanstalt in Dresden.

Harnischs Vorschläge zur Praxis sind bereits oben (S. 36 f.) dargestellt worden. Hier soll nur der Wärme und Eindringlichkeit gedacht werden, mit der er für seine Sache eintritt. Nach Erwähnung des traurigen Zustandes des mathematischen Unterrichtes, im besonderen des in der Raumlehre, wünscht er auf allen Stufen diese letztere „nicht allein anders betrieben, sondern auch noch in anderen Anstalten als bisher“, nämlich auch in den Volksschulen. Für deren Lehrer fügt er eine besondre Anleitung bei, in der sich freilich auch die Auffassung vertreten findet, „daß sich die Raumlehre mehr für Knaben eignet als für Mädchen; in eigentlichen Mädchenschulen fällt sie darum ganz weg“. Den Hauptnachdruck legt Harnisch auf die Anschauung und zwar auf die „vorzügliche Beachtung der Körper gleich von Anfang an“, und auch ein zweites wünscht er kräftig und allgemein gepflegt, „was (bis dahin) wohl weniger allgemein sein möchte“, nämlich mit der Körperbetrachtung die daran jeweils anschließende „Verbindung des fleißigen Gebrauches von Richtscheit (Lineal) und Zirkel (Passer), das Machen von Körpern und das Anschließen mancher Zeichenübungen“, und zwar sollen „jene beiden Werkzeuge, diese beiden Ärme der Raumlehre, schon den kleinsten Kindern in die Hände gegeben werden: die Erfahrung hat mich belehrt, es geht sehr gut“.

Auch Diesterweg wünscht „die Raumlehre als Unterrichtsgegenstand, d. h. als intensives Bildungsmittel ganz besonders gepflegt, weil sie die Anschauung und den Begriff mit einander verbindet“; ihm kommt es hierbei wesentlich an auf die Ausnützung der Vorteile für allgemein geistige Bildung: „ob der junge Geometer zuletzt Flächen und Körper ausmessen und berechnen kann, das ist fast gleichgiltig“. Wie aber soll „der Zugang zur Raumlehre eröffnet werden den mittleren und niederen Schulen, wie den unteren und mittleren Klassen höherer Schulen?“ Der übliche Betrieb der rationellen euklidischen Geometrie ist ungeeignet für den jugendlichen Geist; anderseits ist „die lediglich-praktische Abrichtung zu Ausmessungen und Berechnungen durchaus tadelnswert“, weil nicht geistig bildend und weil sie „keine Vorschule abgibt für den künftigen wissenschaftlichen Vortrag der Geometrie“. Diesterweg empfiehlt deshalb die erfindende, d. h. entwickelnde Methode und führt diese in steter Fragen- und Aufgabenstellung im einzelnen durch: er geht vom Raum und vom Körper i. a. aus, erfrägt die Natur von Fläche, Linie, Punkt und Winkel, behandelt die Bewegung und gegenseitige Lage von Figuren und setzt hier stark mit „einer geometrischen Combinationslehre ein, die in ihrem Fortgange alle möglichen Formen sich selbst construirt und zu einer Menge von Begriffen führt, deren Bearbeitung elementar-logische Übungen möglicht macht“. Solche werden reichlich durchgeführt, und erst zum Schluß wird die

Aufmerksamkeit auf die einzelnen Körperformen gelenkt. Durchweg will Diesterweg „den Schüler in seinem Nachdenken leiten und zum Selbstauffinden anregen“. — In scharfen Gegensatz setzt er sich aber zu Harnisch und anderen (wie Dänzel und Zeller) in betreff der mit dem Unterricht in Raumlehre zu verbindenden zeichnerischen Übungen. Er nennt es eine „unglückliche Idee, Zeichenkunst und geometrische Wissenschaft zugleich zu bezwecken und zu fördern. Wie kann — ruft er aus — der Gedanke, die Elemente einer Kunstfertigkeit mit den Elementen einer Wissenschaft, artistische und scientifische Elemente, miteinander zu amalgamiren, ein erkleckliches Resultat herbeiführen? Man sage doch nicht, daß ja der genannten Unterrichtsgegenstände gemeinsame Basis die Anschauung der Formen sei, und auf diesem Elementar-Standpunkt Theorie und Praxis noch Hand in Hand gehen müßten.... Quelle, Methode und Ziel sind für Zeichnen und Geometrie so verschieden als Gefühl und Verstand, Phantasie und Vernunft, Kunst und Wissenschaft.“ Über solche Meinungen ist dann freilich die Folgezeit in Lehre und Übung hinweggeschritten und hat gerade die Verknüpfung und selbst Durchdringung von wenigstens elementarer Geometrie und sog. Linearzeichnen mehr und mehr verlangt und durchgeführt.

Auch Peters (Nr. 8) tritt für die Pflege der Anschauungsgeometrie ein, diese freilich in einem früheren Alter (S. 73): „Die eigentliche geometrische Anschauungslehre findet ihren Platz in der Kinderstube oder in der Kindleinschule (infant-school), Spielschule, höchstens noch in der untersten Elementarklasse. Für diesen Kreis (von Kindern von 4 bis 7, höchstens 8 Jahren) kann sie eine der anziehendsten und nützlichsten Beschäftigungen werden.“ Die Mathematik hat sich der natürlichen Entwickelung der Kräfte anzuschließen (S. 22). „Da sich nun im Kinde zuerst das Sinnenleben und damit vorwaltend die Vorstellkraft entwickelt, so darf der mathematische (Vorbereitungs-)Unterricht nicht mit höheren Begriffen den Anfang machen; vielmehr müssen die Anschauungen, welche den Begriffen der Wissenschaft unterliegen, dem Kinde vorgehalten, selbstthätig von ihm aufgefaßt und innerlich und äußerlich gebildet werden, damit es so die Elemente der Anschauung zu combiniren und wiederum zu trennen lerne.“ Eine solche Anschauungslehre hat „die gesetzmäßigen Gebilde der Fläche und des Raumes zum Anschauen vorzulegen, benennt dieselben, läßt sie aus freier Hand (in der Fläche auf Papier oder auf der Schiefertafel, und im Raume von bildsamem oder leicht schneidbarem Stoffe) nachbilden und daneben an Werken der Natur und Kunst die betrachteten Formen aufsuchen.“ Aber auf kein einzelnes Merkmal der Gebilde dürfe die Aufmerksamkeit gelenkt werden. Denn diese Arbeit komme der nächsten Stufe, der sog. geometrischen Begriffslehre zu, die als wesentliche Vorbereitung zur wissenschaftlichen Geometrie „von den

ersten Elementen an aus einer Anzahl gegebener Anschauungen den Begriff des eben vorliegenden Gebildes durch Hervorsuchung aller wesentlichen (bestimmenden) Merkmale desselben entwickelt" (S. 74).

Ein Jahrzehnt nach Peters verlangt A. Finger (Nr. 11), derselbe, der so früh auf den vernünftigen Betrieb der Heimatkunde hingewiesen hat, ganz ernstlich eine Vorbereitung für den geometrischen Unterricht. Er weist hin auf die bekannte Tatsache, daß (zu seiner Zeit) nur ein kleiner Teil der Schüler dem üblichen geometrischen Unterricht zu folgen vermag; aber nicht die Schüler, nicht ihr Fleiß und nicht ihre Anlage sei schuld daran, und auch nicht die Lehrer, sondern das Verfahren: „die Schüler kommen unvorbereitet an die Geometrie." „Diese Vorbereitung, genannt Formenlehre, will nicht Geometrie sein, sie will auch nicht die Geometrie verdrängen und ersetzen." Finger erklärt die Formenlehre als „einen auf die Geometrie vorbereitenden Unterricht, der zum Zweck hat, den Schüler anzuleiten, ihren Sinn auf die Betrachtung des Raumes zu richten, und der ihnen mancherlei Formen vorführt, sie an diesen ihr Auge und ihren Verstand üben läßt und ihnen schon manche Kenntnisse gibt, die dann im eigentlichen geometrischen Unterricht begründet, in Zusammenhang gebracht und erweitert werden".

Sein Weg im ersten Jahr besteht in der Betrachtung von mehreren Körpern, und dabei werden Größe, Gestalt, Lage, Richtung beachtet. Genauer dann wird betrachtet der Würfel (Flächen, Kanten, Ecken), dann folgt auch Zeichnen, ferner Durchschneiden des Würfels.

S. 13: „wir wollen nur zeigen, wie viel man mit diesem einfachen Körper machen kann." Dann kommen andere einfache Körper zur Betrachtung.

Im zweiten Jahr erfolgt das Ausgehen vom Punkt, zur Linie und Fläche usw., darauf folgen Verbindungen von Geraden, im Betrachten des Dreiecks, dieses wird gezeichnet und ausgemessen. Höchstens seien noch Vierecke zu betrachten. „Nach unserer Erfahrung bleibt nicht ein einziger bei diesem Unterricht teilnahmlos."

Einen klaren Standpunkt zur Sache nehmen später die mathematischen Abteilungen von zwei Versammlungen der Philologen und Schulmänner ein. Die eine, vom Jahr 1872 zu Leipzig, erklärte auf Guthes Antrag: „Die Versammlung ist einstimmig der Ansicht, daß der Weg des Euklides absolut zu verlassen ist, daß vielmehr dem Unterricht in der Geometrie vorausgehen muß ein propädeutischer Unterricht, der, von der Stereometrie ausgehend, die Anschauung vermittels des Zeichnens übt" — und die andere, vom Jahre 1878 zu Gera, beschloß auf Antrag von Erler: „In der Geometrie ist ein besonderer propädeutischer Unterricht nötig, welcher jedoch dem Inhalt des systematischen Lehrganges nicht vorgreifen darf."

21. Sehen wir nun zu, wie sich bei solchen einander widersprechenden Meinungen der schriftstellernden Fachlehrer die amtliche Welt zur Frage der geometrischen Anschauungslehre gestellt hat.

Zunächst in Preußen. Dieses war nach den schrecklichen Napoleonschen Zeiten durch seine Reformen auf fast allen Gebieten, insbesondere auch auf dem Gebiete der Schule, durch seine bessere Pflege des Volksschulwesens, durch seine Gestaltung und Vereinheitlichung des höheren Schulwesens, durch seine diesem letzteren, insbesondere dem Gymnasium gewidmete Aufstellung amtlicher Lehrpläne und durch deren innerhalb zunächst möglicher Grenzen durchgeführten Vollzug tatsächlich der führende Staat in Deutschland geworden.

Der als Richtschnur für die Verwaltung aufgestellte, aber weder veröffentlichte noch auch zur allgemeinen Anwendung gebrachte Gymnasiumslehrplan von 1816 hatte noch je 6 Wochenstunden in jedem der Jahreskurse für Mathematik in Ansatz gebracht, so daß bei der 10jährigen Gesamtunterrichtsdauer 60 Stunden herauskamen (neben 76 für Latein und 50 für Griechisch). Dabei fiel den beiden untersten Klassen schon „die Bewältigung einer Auswahl aus den vier ersten Büchern des Euklid“ zu. Von Formenlehre ist keine Rede. (Nath S. 95). Den mancherlei Angriffen entgegenzutreten ward dann 1837 ein neuer Lehrplan aufgestellt, der für die jetzt 9stufigen Gymnasien 33 Wochenstunden für Mathematik festlegte (neben 86 für Latein und 42 für Griechisch) und ausdrücklich als Aufgabe für die 4 + 4 Stunden der zwei untersten Klassen „Rechnen und geometrische Anschaungslehre“ vorschrieb. Ob und gar wie dieser zweite Teil der Aufgabe tatsächlich ausgeführt wurde, dürfte heute nur noch schwer festzustellen sein. Nach 20jähriger Geltung des genannten Planes ward 1856 ein neuer Lehrplan für die Gymnasien aufgestellt; dieser brachte bei 9jähriger Dauer des ganzen Schullaufes zusammen 32 Wochenstunden für Mathematik (neben 86 für Latein und 42 für Griechisch) und verfügte für die 3 Wochenstunden der Quarta neben dem Rechnen „geometrische Anschauungslehre und die Anfangsgründe der Planimetrie“ (Wiese I, 32). Die Unterrichts- und Prüfungsordnung für die Realanstalten von 1859 verfügte, daß „in den beiden unteren Klassen behufs der Anschaulichkeit die Elemente der geometrischen Formenlehre mit dem Zeichnen verbunden werden“ sollen (Wiese I, 125).

In Sachsen herrschte während der ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts an den Gymnasien „weder bezüglich der Lehrziele noch bezüglich der Lehrgänge irgendwelche Übereinstimmung“. Der erste Lehrplan für den mathematischen Unterricht wurde 1847 eingeführt; „einen propädeutischen Unterricht in der Geometrie gab es aber damals nicht“. Und ein solcher erschien auch nicht in dem neuen Lehrplan von 1877, der die Geometrie in Untertertia beginnen

ließ und die Gesamtwochenstundenzahl für Mathematik auf 33 beließ. Erst der Lehrplan von 1882, der die Gesamtstundenzahl auf 34 festsetzte, verlangte für Quarta bei 4 Wochenstunden neben dem Rechnen „Einführung in die Geometrie", wie diese nachher noch näher angegeben werden wird.

Bayern war 1803 zu einem Staat geworden, und man bestrebte sich das neue Wesen mit neuem Geiste zu erfüllen, aber freilich geschah dies im höheren Schulwesen in gar vielem Hin- und Herschwanken. 1808 hatte man in den Lateinschulen bzw. Gymnasien neben die übrigen philologischen Klassenlehrerstellen eine besondere Mathematikprofessur gestellt, 1816 wurde sie aufgelassen, 1830 wiederhergestellt. Im Gymnasiallehrplan von 1834 bzw. in der „revidierten Ordnung" von 1854 waren für den 8jährigen Schullauf 22 Wochenstunden für Mathematik angesetzt (neben 62 für Latein und 32 für Griechisch und bei 176 bzw. 184 Wochenstunden aller 8 Jahrgänge). Die „Planimetrie" hatte erst im 7. Jahrgang zu beginnen (bei 3 Wochenstunden), freilich „in durchaus heuristischer Weise, daher langsam vorrückend"; wenn dann die Aufgabe des 8. Jahres in „Stereometrie und ebener Trigonometrie" bestand (ebenfalls 3stündig), so kann man sich, bei dem ohnehin vorhandenen Mangel nicht bloß an guten, sondern überhaupt wohl an ausgebildeten Lehrern, vorstellen, wie solcher geometrischer Unterricht beschaffen war — ein anschaulich geometrischer Anfangsunterricht kam wohl kaum in Betracht.

In Hannover war man endlich 1837 zu einer „Schulordnung" gelangt, in der vom Rechnen nur in beschränktem Umfang bis zur Regeldetri und gebrochenen Zahlen die Rede ist, bei denen „die Lateiner" von dem As der Römer und dessen Einteilung informiert werden, und die Geometrie der Meßkunst wird ihrer bildenden Kraft wegen empfohlen (Schmids Enzykl. III, 276); aber ein allgemein verpflichtender Lehrplan ward damals mit Absicht nicht gegeben. Doch zeigten die Gymnasien i. a. darin Übereinstimmung, daß „in Quarta neben dem Rechnen in 3 bis 4 Wochenstunden ein propädeutischer Kursus der Geometrie mit unterlief und Lehrsätze aus dem Gebiete des Dreiecks, Parallelogramms und Kreises" behandelt wurden (Schmids Enzykl. III, 306).

Wie rückständig manche der deutschen Staaten in der Entwickelung ihres höheren Schulwesens selbst bis nach 1860 geblieben waren, zeigt das Beispiel Braunschweigs, dessen Gymnasialwesen auf der Schulordnung von 1569 beruhte, die für jede besondere Anstalt etwas weiter gebildet worden war (Schmids Enc. I, 746). So kam es, daß die Reifeprüfung nach 7 verschiedenen Vorschriften abgenommen wurde und daß gar die aus dem hannoverschen Gebiet entstammenden Prüflinge nach der hannoverschen Verordnung von 1829 geprüft wurden. So blieb das bis 1861! (Ziegler, Gesch. d. Pädag. 346).

Bis etwa 1860 waren in den Gymnasien von Kurhessen in deren Quarta neben dem üblichen Rechnen „geometrische Vorbegriffe“ in 4 Wochenstunden zu erledigen, und in Hessen-Darmstadt behandelte man im vierten Jahrgang bei 3 Wochenstunden neben reichlichem Rechnen „reine Geometrie bis zur Ähnlichkeit geradliniger Polygone und praktische Elementargeometrie“ (also wohl Feldmessen) (Schmids Enc. III, 502 und 522). Wie solches geleistet werden sollte und noch mehr konnte, ist unerfindlich, und diese Kritik wird auch von berufener Seite bestätigt (ebenda S. 526). Daß bei solchem Hetzen in der Bewältigung der euklidischen Geometrie von einem vorbereitenden Unterricht nicht die Rede sein konnte, ist an sich klar.

In Württemberg hatte man 1818 die ersten selbständigen vierklassigen Realschulen gegründet; deren zwei untersten Klassen hatten in 3 + 2 Wochenstunden „geometrische Formenlehre“ zu behandeln. Dieser Stoff wurde stark zurückgedrängt, als man jene Schulen (1821) zu sechsklassigen ausbaute; deren Umänderung (um 1840) brachte der „Formenlehre mit Zeichnen“ wieder mehr Stunden, diese wurden aber jetzt (mit 3 + 3) in die 3. und 4. Klasse verlegt. Im allgemeinen war in Württemberg meist wenig Neigung vorhanden für einen anschaulichen Unterricht; stets hatten die Systematikfanatiker die Oberhand, und die alles beherrschende und auch besseres Neueres überwuchernde Überlieferung ließ meist alles beim Alten. Zeugnis dafür liefern auch die zwei Tatsachen, daß erst 1872 ein Realgymnasium gegründet wurde und daß in den Gymnasien noch bis 1891 der geometrische Unterricht erst in der Untersekundaklasse begonnen und dann stets euklidisch betrieben wurde.

In Baden ist man nach mehrjährigen Vorverhandlungen 1837 zu einer „Verordnung über die Gelehrtenschulen“ gelangt. Der Entwurf für diese (von 1834) hatte 10 Jahre als Lehrdauer in Aussicht genommen, die Verordnung selbst bestimmte nur deren 9; jener hatte dem Rechnen bzw. geometrischen Unterricht in den vier untersten Klassen je 4 Wochenstunden zugewiesen, diese setzte deren 4 + 4 + 3 + 3 fest. In beiden Gestaltungen des Lehrplanes wird bestimmt, daß in den sechs bzw. fünf Anfangsklassen der mathematische Unterricht nach einer mehr populären Methode, jedoch auf eine geistübende und einsichtige Weise betrieben werde, und daß darauf in den drei folgenden Jahren die reine Mathematik in streng wissenschaftlicher Form gelehrt werden solle. Der Entwurf von 1834 hatte für das vierte Jahr „Anfang des geometrischen Unterrichtes; Kenntnis der geometrischen Figuren; Begriffe und Zeichnungen“ als Aufgabe festgesetzt und für die zwei folgenden Jahre „Fortsetzung der Geometrie; Berechnung der Linien, Flächen und Körper, mit Erläuterung der zu Grunde liegenden Lehrsätze“; die Verordnung selbst schrieb für das vierte und fünfte Jahr einfach „Anfangsgründe der Geometrie“ vor.

Ein wie dürftiger, rein äußerlich beschreibender und eigentlich inhaltsleerer Unterrricht der in solcher „Formenlehre“ gewesen ist, habe ich selbst in meinen Schülerjahren erfahren müssen.

Und wie hier in Baden, so waren wohl die Ursachen für das jämmerliche Darniederliegen zunächst des geometrischen Anschauungsunterrichtes, soweit er überhaupt betrieben wurde, überall dieselben zwei: das überkommene gewaltige Vorwiegen der alten Sprachen und der Mangel an geeigneten Lehrern — mit beiden war zugleich die Geringschätzung des mathematischen Unterrichtes überhaupt gegeben, und naturgemäß erklären sich hieraus die, abgesehen von seltenen Ausnahmen, durchweg gar geringen Leistungen dieses Unterrichtes in den deutschen Gymnasien, über die während der zwei ersten Drittel des 19. Jahrhunderts gar oft und immer erneut Klage geführt wird[1]).

Wohl wurden dann in den 40er und 50er Jahren des 19. Jahrhunderts mehrfach Reformbestrebungen laut, hervorgerufen durch die rasche und starke Entwickelung und den ungeahnten Aufschwung des wissenschaftlichen mathematischen Unterrichtes an den Universitäten, durch die Schaffung besonderer Fachlehrer und deren sich vermehrende Zahl und bessere Ausbildung, durch die Gründung und allmählich bessere Ausgestaltung sowie Vermehrung der sog. Höheren Bürgerschulen und Realschulen und durch deren und ihrer Vertreter stärker und stärker werdendes Ankämpfen gegen die Monopolstellung des Gymnasiums, am meisten wohl hervorgerufen durch die in immer weitere Kreise eindringende und neugestaltend wirkende Änderung der Vorstellung von dem zu erstrebenden Bildungsideal. Aber vorerst wurden jene Reformbestrebungen zurückgedrängt und zunächst fast mundtot gemacht durch die nach 1849 einsetzende Rückwärtsbewegung auf dem allgemein politischen und insbesondere auf dem schulpolitischen Gebiet.

1) So sagt der oben (S. 42 f.) genannte Peters (1822): „Im allgemeinen steht es in Deutschland um die Gymnasialbildung in der Mathematik immer noch schlecht“, und er führt dies des näheren aus (S. 45). Auch Diesterweg bezeugt und beklagt wiederholt diesen Mißstand. Und Drobisch (1832) singt dasselbe Klagelied, zunächst für Sachsen: „Auch auf den besser dotirten und blühenden Anstalten ist das Loos der Mathematik noch traurig genug“ usw. in näherer Ausführung. Auch ein ausländischer Beobachter, der Franzose M. V. Cousin, der im Regierungsauftrag Deutschlands Schulwesen studierte und darüber einen Bericht an den Minister verfaßte, der veröffentlicht wurde und auch in deutscher Übersetzung erschien (1832), bezeugt an einer Reihe von Stellen seines Berichtes (z. B. S. 21, 99, 101, 162, 168 der Übersetzung) die große Schwäche, ja Bedeutungslosigkeit des damaligen mathematischen Unterrichtes. Und auch Schellbach (1887), also in einer Zeit, wo schon eine wesentliche Besserung eingetreten war, beginnt seine Schrift „über die Zukunft der Mathematik“ mit den Worten: „Verkannt und verachtet aus Unkenntnis und Überhebung führten Mathematik und Naturwissenschaften in den Gymnasien von jeher und noch heute ein kümmerliches Dasein“.

22. Erst etwa von den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts ab trat eine Änderung ein, gefordert durch das gesteigerte Selbstbewußtsein und das hierdurch hervorgerufene Bildungsbedürfnis immer weiterer Volkskreise, zugleich auch in Nachwirkung der entsprechenden Bewegung bei der allgemeinen Volksschule und der durch Pestalozzi und Herbart und deren Anhänger gegebenen Anregungen. Man wandte sich jetzt hauptsächlich der Verbesserung des Lehrverfahrens zu in der Absicht, nicht bloß einzelne Begabtere zu fördern[1]), sondern die große Masse der Schüler, den großen Durchschnitt voranzubringen: die frühere Systematik wird gelockert, neue Bestandteile der Wissenschaft werden dem überkommenen Lehrstoff an- und eingefügt, man verlangt und bietet mehr und mehr „eine genetische Anordnung des mathematischen Lehrstoffes, eine analysierende Beweisführung, einen heuristisch gegliederten Vortrag“ — alles mit bewußter Anpassung an die noch unentwickelte Fassungskraft des Schülers, den man nicht „überbürden“ darf“. Dazu gesellt sich die Forderung nach besserer, nach selbständiger Pflege des Vermögens der Raumvorstellung und nach Beweglichmachung der Figuren, einhergehend neben den oder unabhängig von den logischen Beweisgängen der alten Geometrie, und diese Forderung verdichtet sich schon zu der weiteren Forderung, den euklidischen Lehrgang zu verlassen und vereinzelt auch zu der anderen tieferen Forderung, die euklidische strenge Scheidung von ebener und räumlicher Geometrie aufzugeben.

Besondere Erwähnung verdienen hier, zumal in Hinsicht auf die Zurückstellung rein systematischer Gestaltung des Unterrichts und auf Voranstellung rein unterrichtlicher Gesichtspunkte, J. C. V. Hoffmann und G. Holzmüller, jener in der Mitte der 70er, dieser in der Mitte der 90er Jahre des letzten Jahrhunderts hervortretend. Die „Vorschule“ des ersteren (Nr. 41) gab erstmals eine ausführliche Darstellung eines geometrischen Anschauungsunterrichtes; die verschiedenen Bücher und Aufsätze des letzteren legen den Hauptnachdruck auf das „Methodische“ des Unterrichtes (im Gegensatz zum „Systematischen“) und auf einen „naturgemäßen Lehrgang“, und zugleich betonten sie stärker als je zuvor die Rücksichten, die der mathematische Unterricht der höheren Schulen auf dessen praktische Verwendbarkeit zu nehmen habe. Leider hat dann Holzmüller in seiner Beihilfe zur Gestaltung der preußischen Lehrpläne von 1891 nicht durchweg eine besonders glückliche Hand erwiesen.

Wenigstens ein Teil der vorhin erwähnten neuen Auffassungen und Bestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichtes

---

1) Vgl. z. B. H. Weber im Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, 12. Band (1903), S. 400: „Über die Stellung der Elementarmathematik in der mathematischen Wissenschaft.“

und insbesondere des geometrischen Anfangsunterrichtes wird durch die äußerst rege Vor- und Mitarbeit der beteiligten Lehrerwelt der Mittel-, bald auch zum Teil der Hochschulen und durch die in verschiedenen deutschen Staaten erlassenen Lehrpläne und Weisungen der 80er Jahre und der Folgezeit im wesentlichen grundsätzlich festgelegt. Wir wollen diese etwas genauer vorführen.

So bestimmt in Preußen der Lehrplan von 1882 für drei Schulgattungen, daß von den 4 Wochenstunden in Quinta „eine wöchentliche Lehrstunde dem Zeichnen von Figuren mit Lineal und Zirkel zu widmen und durch diese methodische Ausbildung der davon ausdrücklich zu unterscheidende geometrische Unterricht vorzubereiten" sei. — Im Lehrplan von 1891 wird — und zwar dies für alle drei Schulgattungen — jene Vorbereitungslehre in Quinta in jeglicher Form gestrichen, und es heißt wieder unter Verzicht auf irgend welche ausdrücklich hervorgehobene anschauliche Grundlegung: „In Quarta Planimetrie (2 Stunden), nämlich Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken". — Der jetzt noch geltende Lehrplan von 1901 kehrt wieder zur besseren Einsicht und zur Bestimmung von 1882 zurück; er verfügt für die Quarta der Gymnasien und Realgymnasien einen „propädeutischen geometrischen Anschauungsunterricht, sowie Übungen im Gebrauche von Zirkel und Lineal" und bestimmt für dessen Ausgestaltung folgendes: „Der geometrische Unterricht beginnt mit einem Vorbereitungsunterricht, welcher von der Betrachtung einfacher Körper ausgehend das Anschauungsvermögen bildet und zugleich Gelegenheit gibt, die Schüler im Gebrauche von Zirkel und Lineal zu üben." Im übrigen ist die Lehraufgabe der Quarta dieselbe geblieben, d. h. es schließt sich die frühere Aufgabe betreffs der Geraden, Winkel und Dreiecke an. Für die Oberrealschulen aber wird diese selbe Aufgabe eines etwas vorbereitenden Unterrichtes schon für deren Quinta angesetzt. Bei solcher Lehrplanbestimmung ist es nicht anders möglich, als daß jenem Anschauungsunterricht nur eine geringe Zeit gewidmet werden kann.

In Sachsen hat man 1860 zunächst sechsklassige Realschulen gegründet oder mehr einheitlich gestaltet; sie wurden dann 1873 zu siebenklassigen Realschulen erster Ordnung und 1876 zu achtklassigen, endlich 1884 zu neunklassigen Anstalten erweitert. Die Verordnung von 1860 verlangte neben dem je vierstündigen Rechnen der drei untersten Klassen in besonderen zwei Wochenstunden der dritten Klasse (von unten ab) „die geometrische Formenlehre", ohne darüber einzelnes anzugeben. — Die Verordnung von 1876/77 bestimmte bei gleicher Zahl und Verteilung der Stunden wiederum in der dritten Klasse (Quarta) „Entwickelung der elementaren planimetrischen und stereometrischen Anschauungen", auf die dann sofort „die Lehre von den Winkeln und Parallelen, die Eintheilung (!) und Haupteigenschaften

der Drei- und Vierecke“ zu folgen hatte; im übrigen wird u. a. als Lehrziel der Gesamtschule verlangt „besonders eine geübte stereometrische Anschauung“. — Die Verordnung von 1884 für die Realgymnasien verlangt im allgemeinen: „Behufs Ausbildung der räumlichen Phantasie sind im geometrischen Unterrichte auf allen Stufen möglichst viel Übungen in geometrischer Anschauung und Construktion anzustellen“, und im besonderen wird, folgend auf einen fünf- und vierstündigen Rechenunterricht der VI bzw. V und neben einem solchen dreistündigen in IV, hier auch in zwei Wochenstunden abermals „geometrische Formenlehre und Entwickelung der elementaren planimetrischen und stereometrischen Anschauungen“ verlangt, auf die sofort „Einleitung in die Planimetrie bis zu den Congruenzsätzen“ zu folgen hat. — Es sei noch bemerkt, daß in der sächsischen Lehrplanordnung für die Lehrerseminare von 1876 in der untersten der sechs Klassenstufen ebenfalls „Formen- und Construktionslehre; Raumberechnung“ gefordert wird, während der Beginn des Unterrichts in „Planimetrie“ dem nächstfolgenden Schuljahr vorbehalten bleibt.

Für die sächsischen Gymnasien gilt das Wort:[1]) „Einen propädeutischen Unterricht in der Geometrie gab es nicht“ bis 1882. Erst da wurde als Vorschrift der Grundgedanke ausgesprochen: „Wie die allgemeine Arithmetik durch den Rechenunterricht in den Unterklassen, so wird die Geometrie durch den Anschauungsunterricht in Quarta vorbereitet“ — und im einzelnen hieß deren bezügliche Lehraufgabe (bei vier Wochenstunden): „Einführung in die Geometrie auf Grund von Anschauungen (z. B. von Modellen) verbunden mit Meß-, Zeichen- und Rechenübungen“, um sofort anzuschließen: „Die Lehre von den Winkeln bis zu den Sätzen über durchschnittene Parallelen (einschließlich)“. In der Lehrordnung von 1893 wurde (bei jetzt nur noch drei Wochenstunden) für Quarta bestimmt: „Entwickelung der einfachsten stereometrischen und planimetrischen Begriffe aus der Anschauung, verbunden mit leichten Meß-, Zeichen- und Rechenübungen“. — Eine Generalverordnung vom Januar 1908 hält es für angängig, „bereits in Quinta eine der vier Wochenstunden dem geometrischen Anschauungsunterrichte einzuräumen, wie er jetzt für Quarta vorgeschrieben ist, so daß in Quarta die Planimetrie ein gutes Stück vorwärts kommen kann“.

Die Gymnasien sowohl wie die Realgymnasien in Hessen kennen (gemäß der Verordnung von 1893) keinen geometrischen Vorbereitungsunterricht; nur die Oberrealschulen haben (nach dem Lehrplan von 1899) im ersten Halbjahr der Quarta einen „Anschauungsunterricht“ zu behandeln.

---

1) Vgl. Witting, Der mathematische Unterricht in Sachsen. Abhandlungen (II, 2) herausgegeben von F. Klein. B. G. Teubner. 1910.

In Bayern kennen die Lehrpläne von 1891 sowohl für die Gymnasien wie für die Realgymnasien überhaupt keinen Geometrie-Unterricht in den vier untersten Klassen bei 3 + 3 + 3 + 2 (3) Wochenstunden für Mathematik; erst für die fünfte Klasse (= Ob III) beider verlangt die Vorschrift: für „Planimetrie: Grundbegriffe (Gerade); Winkel; Dreieck“ usw. — also von vorbereitender Geometrie ist keine Rede.

Erst im Jahre 1901 wurden die Lehraufgaben der einzelnen Klassen zum Teil nach unten verschoben, und für die vierte Klasse (= U III) der Gymnasien wurde nun in den Lehrplan die Forderung eingefügt: „Elemente der ebenen Geometrie in propädeutischer Methode mit Übungen im geometrischen Zeichnen“, und es wurde zugleich eine eigene Anleitung an die Lehrer hinausgegeben behufs beabsichtigt richtiger Gestaltung dieses Unterrichtsteiles. Von Körperbetrachtung ist darin nicht die Rede. An den Gebrauch von Lineal, Maßstab und Zirkel sich anlehnend werden nach Vorzeichnungen großen Maßstabes an der Wandtafel und unter Mit- und Nachzeichnen der Schüler die Begriffe „Gerade, Strahl, Strecke, Messen von und Rechnen mit Strecken, Kreis, Winkel usw.“ durchgenommen. Auf diese Art der Gestaltung wird weiter unten zurückzukommen sein.

Auch in Württemberg hat man sich endlich 1891 dazu herbeigelassen (vgl. oben S. 47), dem Beispiel der übrigen deutschen Staaten etwas zu folgen und, sofern der geometrische Unterricht dabei in Betracht kommt, dessen Beginn im Gymnasium um ein Jahr früher anzusetzen, also schon (!) in der 5. Klasse (= Ob III), freilich mit nur einer Wochenstunde (neben zwei Stunden Rechnen). Die zu lösende Aufgabe wird dabei folgendermaßen festgelegt: „I. Propädeutischer Teil: Einführung in die Grundformen der Geometrie durch Verbindung von Zeichnen und Anschauung. II. Systematischer Teil: Lehrsätze von den Winkeln, den Parallelen und der Kongruenz der Dreiecke, mit einfachen Übungen (Spieker, Lehrbuch der ebenen Geometrie, Abschnitt I, II, III).“ Im Jahre 1899 wurde dann die Lehraufgabe dieser Ob III des Gymnasiums bis ins einzelnste festgelegt[1]) — eine

1) Der Wortlaut ist folgender:

Geometrie (wöchentlich eine Stunde).

I. Propädeutischer Teil.

1. Erklärung von Körper, Flächen, Linien, Geraden, Punkt. Ziehen von Geraden. Strecken (Spieker § 7, 8, 9).
2. Der Kreis nach Spieker § 40, 41, 43, 44.
3. Der Winkel, flacher, hohler, konkaver, Winkelmaß (Spieker § 10—14).
4. Winkelhalbierung ohne Beweis. Übungen: Teilung eines Winkels in 2, 4, 8, . . . gleiche Teile. Halbierung des flachen Winkels.
5. Rechter Winkel (Sp. § 12).
6. Spitze und stumpfe Winkel (Sp. § 13).

unbegreifliche Leistung von amtswegen, unbegreiflich in bezug auf Stoffmenge (eine Wochenstunde!!) wie in bezug auf methodische Behandlung und in bezug auf Zutrauen zur Lehrbefähigung der Unterrichtenden. Die armen Lehrer, die solches durchzuhetzen haben! — Für die Realgymnasien wurde der Beginn des Geometrieunterrichtes auf ein Jahr früher als bei den Gymnasien festgesetzt, und 1906 wurde verfügt, daß „in Klasse IV und V (U III und Ob III) Übungen im geometrischen Zeichnen im Anschluß an die Geometrie zu betreiben sind", im übrigen aber wurde nach altüberkommener Weise als Lehraufgabe festgesetzt: „die Anfänge bis zum Abschluß der Dreieckslehre". Man

---

7. Operationen mit Winkeln. Anlegen, Addieren usw.
8. Nebenwinkel (Lehrs. § 15, ohne Beweis).
9. Scheitelwinkel (Lehrs. § 17, 18, ohne Beweis).
10. Parallele Linien (Sp. § 19, 20). Ziehen von Parallelen. Übung: Teilung einer Strecke in beliebig viele gleiche Teile.
11. Winkelbezeichnung bei zwei Parallelen und einer Schnittlinie (Sp. § 21, 22).
12. Dreiecke und Dreiecksbezeichnungen (Sp. § 28, 29, 30).
13. Einteilung der Dreiecke (Sp. § 36).
14. Konstruktion eines Dreicks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel Sp. § 67).
15. Ebenso aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln (Sp. § 68, I).
16. Ebenso aus den drei Seiten (Sp. § 69).
17. Halbierung einer gegebenen Strecke. Mittellot (§ 60). Übung: Teilung einer Strecke in 2, 4, 8, . . . gleiche Teile.
18. Errichtung und Fällen von Loten. Übung: die drei Höhen des Dreiecks.

II. Systematischer Teil.

Abschnitt I von Spieker.

1. Satz von den Nebenwinkeln (§ 15, Zusätze § 16).
2. Satz von den Scheitelwinkeln (§ 18). Weglassung der Umkehrung (§ 18, Zus. II).
3. Sätze über Parallelen und Umkehrung (§ 23, 24, Zusätze § 25, 26). Ohne Beweise. Übungen ausgewählt aus Abschnitt I. § 27 fällt weg.

Abschnitt II von Spieker.

§ 31 fällt weg.

4. Satz vom Außenwinkel (§ 33).
5. Satz von der Winkelsumme im Dreieck (§ 34, Zusätze § 35, 36, 37).
6. Satz von der Winkelsumme im Polygon (§ 39). Einige Übungen zum Abschnitt II.

Abschnitt III von Spieker.

7. I. Kongruenzfall (§ 67, 47), ohne Beweis.
8. II. „ (§ 68, 48), „ „
9. III. „ (§ 69, 51), „ „
10. Halbierung einer Strecke (§ 60).
11. Halbierung eines Winkels (§ 61).
12. Errichten des Lotes (§ 62).
13. Fällen des Lotes (§ 63).
14. Anlegen eines Winkels (§ 64).
15. Ziehen von Parallelen (§ 65). Einige Übungen aus Abschnitt III.

sieht hieraus, Euklid behält Württemberg vorerst noch ganz als Herrschaftsgebiet.

In Baden wurde 1868 das erste Realgymnasium gegründet, und in der bezüglichen Verordnung ward schon für Quinta neben vier Stunden Rechnen eine Wochenstunde „Geometrische Formenlehre" angesetzt, und deren Aufgabe wurde des näheren in folgender Weise bestimmt:

„1. Die wichtigsten Lagenverhältnisse in einer Ebene. Winkel, Scheitelwinkel, Nebenwinkel usw. Die verschiedenen Arten der Dreiecke, Vierecke, einiges über reguläre Vielecke und Kreis. — Anleitung zum Gebrauch von Lineal, Maßstab und Zirkel.

2. Die Bestimmung der Flächenräume einiger ebenen Formen.

3. Die wichtigsten Lagenverhältnisse von Ebenen und Geraden im Raume. Flächenwinkel, Ecke usw. Die verschiedenen Arten von Prismen, Pyramiden, Polyedern usw. Zählung der Kanten, Flächen und Ecken der betrachteten Körper.

4. Die Bestimmung des Volumens einiger Körperräume."

Man sollte nicht meinen, daß man eine solche Stoffart des Unterrichtes und eine solche Stoffülle bei einer (!) Wochenstunde für zehn- bis elfjährige Kinder als Aufgabe stellen konnte, und daß man darnach während des ganzen Jahres der Quarta jeglichen geometrischen Unterricht aussetzte, um darauf in U III mit den hochtrabenden „Definitionen von Körperraum, Fläche, ..." aufs neue zu beginnen! Die Praxis der Schule hat sich dann freilich auch leicht mit solchen Lehrplanforderungen abgefunden.

In den Jahren 1863 und 64 war der badische Gymnasiallehrplan von 1837 schon in manchen Punkten abgeändert worden; eine völlig neue Fassung erhielt er dann 1869. Und hier wurde nun vorbereitender geometrischer Unterricht sogar für zwei Jahre festgesetzt, für Quinta und Quarta, freilich innerhalb der im ganzen angeordneten 4 + 3 Wochenstunden. Die betreffende Vorschrift des Lehrplanes bestimmt: „In Klasse II und III ist außer dem numerischen Rechnen in kurzer Fassung die geometrische Formenlehre zu behandeln und sind damit entsprechende Übungen im geometrischen Zeichnen zu verbinden." Auch hier war das Papier geduldig; die Schule selbst merkte wohl in der Mehrzahl der Fälle nichts von der bestehenden Vorschrift — höchstens daß da und dort wenigstens für Quarta „geometrische Formenlehre in kurzer Fassung" in den Schulberichten verzeichnet wird. Und es war wohl auch gut so, da ja die meisten mit solcher Aufgabe betrauten Lehrer, weil nicht mathematisch und oft nicht pädagogisch gebildet, nichts Rechtes damit anzufangen wußten. So war es fast nur eine Besiegelung des trotz Verordnung bestehenden Standes der Dinge, daß die im Jahre 1883 erlassene An-

ordnung über die Gestaltung des mathematischen Unterrichtes an den Gymnasien sehr einfach verfügte: „Ein propädeutischer Kursus in der geometrischen Formenlehre fällt weg, auch wo dieselbe nicht im Zeichenunterricht Berücksichtigung findet."

23. Unser Bericht über die allmähliche Ausgestaltung des mathematischen Unterrichtes, insbesondere über das Auf- und Nieder in der Wertschätzung und im Betrieb des geometrischen Anschauungsunterrichtes hat uns bis zum Ende des 19. Jahrhunderts geführt. Wohl waren in dessen letzten zwei Jahrzehnten und dann besonders in den ersten Jahren des neuen 20. Jahrhunderts große Veränderungen eingetreten zum Teil in den Lehrplänen und im Betrieb der einzelnen Unterrichtszweige, viel mehr und einschneidender noch in der Angleichung der verschiedenen Schulgattungen und hauptsächlich ihrer „Berechtigungen"; aber der mathematische Teil des Unterrichtsganzen war von all diesen Veränderungen verhältnismäßig nur wenig berührt worden.

Eine gewaltige Förderung hat dann aber der mathematische und auch der ganze naturkundliche Unterricht unserer höheren Schulen von einer ganz anderen Seite her erfahren.

Zunächst ist hier die gewaltige Entwickelung der Naturwissenschaften hervorzuheben und zwar diese sowohl hinsichtlich ihres theoretischen Aufbaues und ihrer mathematischen und philosophischen Verwendung als auch ganz besonders hinsichtlich ihrer praktischen Anwendungen, aus denen in den letzten Zeiten eine ebenso rasche wie gründliche und einschneidende Einwirkung auf die Lebensgestaltung der Einzelnen wie der Völker erflossen ist. Diese offensichtliche und immer stärker hervortretende Einwirkung hat in den weitesten Kreisen eine ungemeine Erstarkung der naturwissenschaftlichen Interessen gezeitigt, die ihrerseits nicht ohne Rückwirkung auf die Schule blieb und ihren Einfluß auch auf den mathematischen Teil des Unterrichtes äußern mußte.

Und auffallenderweise fand diese Einwirkung statt auf dem scheinbaren Umweg über die Hochschulen, zunächst über die technischen Hochschulen [1]. An diesen hatte der lange gar zu stark und einseitig gepflegte mathematische Betrieb technischer Dinge, dabei dieser ohne ausreichende Erfahrungsgrundlagen, anfangs der 90er Jahre eine Gegenströmung ausgelöst; diese beseitigte kurzerhand ganze theoretische Lehrgebiete und schränkte auch mehrfach den Unterricht in reiner Mathematik zugunsten technischer Dinge ein. Die sich

1) Vgl. H. Lorenz, Der Unterricht in angewandter Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. Jahresber. d. d. Math.-Vereinigung, Bd. 12 (1903), S. 565 ff.

anschließenden Erörterungen und Kämpfe über Fragen der Gestaltung des Hochschulunterrichtes ergriffen nun auch die Universitäten, da es sich u. a. um die volle Geltendmachung eines mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsideales der realistischen Lehranstalten sowie um eine stärkere Belebung des mathematischen Unterrichtes durch Anwendungen auf naturkundliche, technische oder soziale Fragen handelte. Und auffallenderweise waren es gerade Mathematiker der strengen und abstrakten Richtung (v. Brill, Fricke, Hauck, F. Klein, Krazer, Reye, Stäckel, H. Weber), die einer Berücksichtigung der Anwendungen der Mathematik das Wort geredet oder ihr praktisch die Wege geebnet haben[1]).

Diese machtvolle Bewegung und ihre neuen Bestrebungen sind recht enge verknüpft mit dem Namen von Felix Klein (Professor in Erlangen, dann München, jetzt in Göttingen), der schon vor vielen Jahren und wiederholt seine Stimme erhoben hat, um auf die Notwendigkeit hinzuweisen, auch an den Universitäten im mathematischen Unterricht die Anwendungen zu berücksichtigen, das Raumanschauungsvermögen der Lernenden zu entwickeln, sowie deren Fähigkeit zu wecken und zu schärfen, die Erscheinungen und Vorgänge im Leben, in der Natur und in der Technik mathematisch zu erfassen und festzuhalten.

Nach der gleichen Richtung zielten die sog. Braunschweiger Beschlüsse (1891) des im Jahr zuvor begründeten „Vereins zur Förderung des Unterrichtes in der Mathematik und den Naturwissenschaften". Sie sagten: „Die Schüler der höheren Lehranstalten sind i. a. noch zu wenig im stande, in den sich ihnen im Leben darbietenden Erscheinungen das Mathematische zu erkennen. Die Ursache davon ist vorzugsweise in dem Umstand zu suchen, daß die Anwendungen der mathematischen Theorien vielfach in künstlich gemachten Beispielen bestehen, anstatt sich auf die Verhältnisse zu beziehen, die sich in der Wirklichkeit darbieten. Daher muß das System der Schulmathematik, unbeschadet seiner vollen Selbständigkeit als Unterrichtsgegenstand, im einzelnen mit Rücksicht auf die sich naturgemäß darbietende Verwendung (Physik, Chemie, Astronomie usw., kaufmännisches Rechnen) aufgebaut werden."

Damit war eine Grundauffassung gegeben; aber die Kritik des überlieferten Schulbetriebes erhielt ihre Schärfe und praktische Bedeutung erst durch die „Ingenieurbewegung", die 1895 einsetzt und anfangs parallel mit jenen gezeichneten Bewegungen einherläuft, aber mählich, zumal durch den Einfluß des trefflichen Baurates Peters, des Direktors des Vereins deutscher Ingenieure, mehr und

1) Vgl. Jahresber. d. deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 8 (1899), 95—118; Bd. 11 (1902), 26—37; Bd. 12 (1903), 567; Bd. 13 (1904), 313ff. u. 517ff.

mehr mit ihnen Hand in Hand geht. „Es muß mit dem einseitigen, auch die Schulen beherrschenden Universitätsgeist, der von der Wirklichkeit der Dinge ablenkt, grundsätzlich gebrochen werden.“ So läßt sich Prof. Riedler von der Technischen Hochschule Charlottenburg 1895 vernehmen in seinem ersten noch weiterhin zu erwähnenden Aufsatz, und er drückt so das immer kräftigere Verlangen der Techniker aus, daß die Mittelschule sich, d. h. ihren Geist ändere, daß sie den naturgemäß herausgewachsenen Ansprüchen genügen solle, die an die leitenden Kreise unseres Volkes gestellt werden müssen, hauptsächlich im Hinblick auf die steigende Bedeutung der wirtschaftlichen Fragen.

Die genannten verschiedenen Bewegungen, die mathematische, die ingenieurtechnische und die auf der Naturforscherversammlung zu Hamburg (1901) in weithin hörbarer Weise und eindringlich auftretende naturkundliche, insbesondere biologische Bewegung, flossen nun zu einem mächtigen Strome zusammen auf der Naturforscher- und Ärzteversammlung zu Kassel (1903): hier wurde u. a. beschlossen, „die Gesamtheit der Fragen des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtes zum Gegenstand einer umfassenden Verhandlung zu machen“.

Diese Verhandlung erfolgte im Jahr darauf bei der Tagung in Breslau (1904): nach Erstattung von drei trefflichen Berichten (von Fricke, Klein und Merkel) und nach eingehender Besprechung der einschlägigen Unterrichtsfragen wurde zu deren gründlicher allseitiger Behandlung ein zwölfgliedriger (aus Mathematikern, Physikern, Lehrern, Ärzten und Technikern bestehender) Ausschuß eingesetzt, dessen Aufgabe dahin ging, „bestimmte, abgeglichene Vorschläge“ zu machen zur Verbesserung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes der Mittelschulen. Diesem Auftrag entsprach der Ausschuß in ernster, hingebender Arbeit: die entsprechenden Berichte und die vereinbarten Vorschläge des Unterrichtsausschusses erfolgten auf der Tagung zu Meran (1905); sie wurden gutgeheißen und gelten seitdem als die Meraner Vorschläge.

Wir müssen und können hier absehen von den in ihnen entwickelten allgemeinen Grundsätzen betreffs der Bedeutung einerseits der sprachlich-geschichtlichen, anderseits der mathematisch-naturwissenschaftlichen Schulbildung. Uns interessieren hier vor allem die zum Teil neuartigen Ziele und Aufgaben, welche die Meraner Beschlüsse dem mathematischen Unterricht der Mittelschulen zuweisen.

Als selbstverständliche Aufgabe wird wie bisher so auch fernerhin dem mathematischen Unterricht die Pflege der logischen Schulung des Geistes zugewiesen; zu ihr soll aber als stärker in Betracht zu ziehende Aufgabe oder als neue, jedenfalls „als wichtigste Aufgabe

des Mathematikunterrichtes“ künftighin hinzukommen[1]) die **Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens** und die **Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens**, „um so die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwickelung zu bringen“. Nach diesen Gesichtspunkten hat dann jener Unterrichtsausschuß einen neuen Lehrplan für den mathematischen Unterricht zunächst der Gymnasien entworfen, jeder der 9 Klassen ihre Aufgabe zuweisend.

Für die hier in Betracht kommende Untersuchung will ich ganz absehen von den in diesem Lehrplan niedergelegten vollen Jahresaufgaben der oberen Klassen (— die übrigens später werden besprochen werden —), aber auch von denen der unteren Klassen, insoweit darin vom arithmetischen und vom algebraischen Teil des Unterrichtes die Rede ist. Einzig die Gestaltung des bezüglichen Unterrichtes in Geometrie soll hier zur Besprechung kommen.

In bezug hierauf stellt der Unterrichtsausschuß als Jahresaufgabe der Quinta neben das übliche „Rechnen“[2]) eine „**propädeutische Raumlehre**“ und bestimmt deren Inhalt und Einzelgestaltung wie folgt: „Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung, jedoch derart, daß der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheint. Raumausdehnungen, Flächen, Linien, Punkte zunächst an der Umgebung erläutert und bestätigt an den verschiedensten Körpern. Ebene Figuren zunächst als Teile der Körperbegrenzung, dann als selbständige Gebilde, an welchen die Begriffe der Richtung, des Winkels, des Parallelismus, der Symmetrie zum Verständnis zu bringen sind. Übung im Gebrauche des Lineals und Zirkels, beständiges Zeichnen und Messen.“

Inwiefern diese Vorschläge der Unterrichtskommission Ziel, Inhalt und Lehrgang der untersten Stufe geometrischer Ausbildung umfassend genug und richtig darstellen, soll weiterhin noch besprochen werden (§ 37). Jedenfalls hat aber das Ganze ihrer Reformvorschläge eine gewaltige Wirkung ausgeübt. Vor allem die Unterrichtsverwaltungen der deutschen Länder wurden stark genug daran gemahnt, das Bestehende erneut zu prüfen; die Verhandlungen der gesetzgebenden Körperschaften anerkannten recht deutlich die Berechtigung genannter Bestrebungen, und der Widerhall und die Nachahmung, welche sie vielfach gefunden haben, zumal in Österreich

1) Vgl. Gutzmers Gesamtbericht über die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte (Leipzig und Berlin, Teubner, 1908), S. 104.

2) Diesem Rechnen der Quinta werden auch zugewiesen: „Einfachste Aufgaben der Flächen- und Raumberechnung unter Verwertung des Zusammenhanges zwischen Rauminhalt und Gewicht. (Bei allen derartigen Rechnungen ist stets ein Überschlag der Größenordnung des Ergebnisses voranzuschicken.)“

und in Ungarn, konnten nur fördernd auf die Entwickelung und die praktische Durchführung dieser Reformbestrebungen i. a. einwirken.

Was im besonderen den geometrischen Anschauungsunterricht betrifft, so wurde dieser erstmals in Deutschland in Bayern im wesentlichen gemäß den Meraner Vorschlägen amtlich eingerichtet, nämlich im Lehrplan der dort erst jetzt begründeten Oberrealschulen vom Jahre 1907. Hier ist zunächst lobend zu erwähnen, daß der geometrische Teil des Lehrplanes stets unter der Überschrift „Raumlehre" erscheint (eingeteilt in Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie), und es ist weiter die folgende allgemeine Bemerkung zu beachten: „Im gesamten Unterricht ist der Anschauung der breiteste Raum zu gewähren. Anschauungsmittel aller Art sind, wo immer möglich, heranzuziehen. Abstrakte Auffassungen und Beweise, die dem Anfänger oft unverständlich bleiben, sind erst nach vorangegangener anschauungsmäßiger Darstellung vorzuführen. Im besonderen hat der Geometrieunterricht in der III. und IV. Klasse die darzulegenden Sätze zuerst auf erfahrungsmäßigem Wege zu gewinnen und dann erst logisch zu beweisen."

Die für 2 von im ganzen 5 Wochenstunden angesetzte „Raumlehre" der III. Klasse hat zu behandeln:

„a) Vorbereitend.

Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung. Räumliche und ebene Gebilde. Ebene Figuren, zunächst als Teile der Körperbegrenzung, dann als selbständige Gebilde, an welchen die Begriffe der Richtung, des Winkels, des Parallelismus, der Symmetrie zum Verständnis zu bringen sind. In Verbindung damit ständige Übungen im Zeichnen, im Gebrauch des Lineals, der Winkel, des Zirkels und des Winkelmessers, Messen von Längen und Winkeln. Längen- und Winkelmessungen auch im Gelände mit einfachsten Instrumenten. Einfachste Aufgaben der Flächen- und Raumberechnung."

„b) Systematisch.

Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Konstruktion des Dreiecks aus gegebenen Bestimmungsstücken. Kongruenzsätze. Rechtwinkelige, gleichschenkelige, gleichseitige Dreiecke. Haupteigenschaften des Kreises. Geometrische Örter. Elementarkonstruktionen: Senkrechte, Winkelhalbierende. Einfache Sätze über das Parallelogramm und das Trapez."

Der IV. Klasse wird dann als Fortsetzung der „Raumlehre" die folgende, ebenfalls in 2 Wochenstunden zu erledigende Teilaufgabe aus der „Planimetrie" zugewiesen: „Gleichheit, Verhältnis und Ähnlichkeit geradliniger Figuren. Flächenberechnung. Einfache Verwandlungs- und Teilungsaufgaben. Erweiterung der Lehre vom Kreis. Konstruktionsaufgaben."

24. Im vorstehenden wurde die geschichtliche Entwickelung des Unterrichtes in der wesentlich durch Anschauung zu gewinnenden Raumlehre bis zur Gegenwart dargestellt, und zwar wurde gezeigt, wie sich diese in Deutschland vollzogen hat.

Es ist wohl angezeigt, ja notwendig, nun auch noch einen Blick zu werfen auf die Lage dieses Unterrichtszweiges, wie sie im Ausland besteht und zwar auf amtlichem wie auf privatem Gebiet.

Und hier ist der Zeitfolge und der Bedeutung nach in allererster Reihe Österreich zu nennen. Hier war unter Umgestaltung von Einrichtung und Lehrweise der Anstalten des Jesuitenordens nach langen Verhandlungen privater und amtlicher Natur endlich 1849 der „Entwurf einer Organisation der Gymnasien und Realschulen" zustande gekommen, der 1854 endgültig zur Einführung gelangte und dessen Grundgedanken und Hauptausführungen auch heute noch in Geltung sind. Der eine Grundgedanke ward schon damals dahin ausgesprochen, daß „das Gymnasium einen vollständig mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht aufnimmt im Ebenmaße mit den philologisch-historischen Disciplinen", und eine der wichtigsten Hauptausführungen bestand für den Unterricht in Raumlehre darin, daß dieser grundsätzlich in zwei Stufen erteilt wird derart, daß in den Gymnasien und in den Realschulen deren durch drei Jahre sich erstreckender Unterstufe als Aufgabe zugewiesen ist eine „Vorschule der Raumlehre in durchgängiger Verbindung planimetrischer und einfachster stereometrischen Vorstellungen und Betätigungen, zugleich mit Verwertung und Durchbildung der von den übrigen Schulfächern und vom gewöhnlichen Leben nahegelegten Raumvorstellungen". So der Wortlaut der neuesten Bestimmung von 1909.

Im einzelnen lauten die betreffenden Vorschriften für die Gymnasien und für die Realschulen wörtlich gleich, nämlich folgendermaßen:

> Erste Klasse (3 Wochenstunden, zugleich für Rechnen und zwar die Raumlehre 4 Wochen nach Schulanfang beginnend und für gewöhnlich Stunde um Stunde mit Rechnen abwechselnd): Vorübungen im Anschauen einfacher Körperformen, namentlich des Würfels und der Kugel. Übungen im Gebrauch von Zirkel, Lineal, Dreieck, Maßstab, Transporteur. Messen und Zeichnen von Gegenständen der Umgebung. Vertrautwerden mit den Eigenschaften und Beziehungen einfachster individueller Raumgebilde (Winkel von 90°, 60°, gleichschenklige, rechtwinklige, gleichseitige Dreiecke u. dgl.), Parallel- und Normalsein von Geraden und Ebenen an individuellen Flächen- und Körperformen.
>
> Inhalt von Quadrat, Rechteck, Würfel, Quader als Anwendungen des metrischen Maßsystems.

Zweite Klasse (3 Wochenstunden, zugleich für Rechnen — dazu in den Realschulen 1 Doppelstunde für geometrisches Zeichnen): Anschauung der Symmetrie von körperlichen und ebenen Gebilden. Einsicht in die ausreichenden Bestimmungsstücke einer ebenen Figur durch Konstruktion (als Ersatz der Kongruenzbeweise). Mannigfaltige Anwendungen auf Messungen im Schulzimmer, womöglich auch im Gelände. Dreiecke, Vierecke, Vielecke (namentlich regelmäßige); Kreise. Die dazu gehörigen geraden Prismen, Pyramiden, Zylinder und Kegel. Kugel nach den Erfordernissen des gleichzeitigen Geographieunterrichtes. Beweglichkeit der Gebilde (ihre Gestalt und Größenänderungen bei Änderung der Bestimmungsstücke).

[Dazu in Realschulen geometrisches Zeichnen: Fortgesetzte Übungen im Gebrauch der Zeicheninstrumente. Konstruktionsaufgaben im Anschluß an den Lehrstoff der Raumlehre, auch angewendet auf das Zeichnen einfacher geometrischer Zierformen.]

Dritte Klasse (Stundenzahl wie bei der II. Klasse): Beziehungen zwischen Flächeninhalten (Vergleichungen, einfachste Verwandlungen, Maßformeln), Rauminhalte der entsprechenden geraden Prismen und Zylinder. Messungen und Vergleichungen an Gegenständen des Schulzimmers, des Schulgartens und womöglich auch im Gelände. Pythagoräischer Lehrsatz mit reichlichen Veranschaulichungen und Anwendungen an ebenen und einfachsten körperlichen Gebilden (z. B. Diagonale des Würfels, Höhe gerader quadratischer Pyramiden). Pyramide (Kegel), Kugel; Oberfläche und Inhalt (für letztere ohne Begründung).

Vielseitige Verbindung des arithmetischen[1]) und geometrischen Unterrichtes. Graphische Darstellung der vier Rechnungsoperationen an Strecken, der Ausdrücke für $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$, $(a+b)^3$ usw. an Rechtecken, Würfeln. Quadrat- und Kubikwurzelziehen im Anschluß an die planimetrischen und stereometrischen Rechnungen. Abgekürztes Rechnen. Beurteilung des anzustrebenden und zu erreichenden Genauigkeitsgrades auf Grund wirklichen Messens der Bestimmungsstücke. Überschlag der Größenordnung des Ergebnisses, Bestätigung der Schätzungs- und Rechnungsergebnisse durch nachträgliches Messen und Wägen der berechneten Körper- und Flächenmodelle. Weitere Anregungen zu funktionalem Denken: Wachsen der Längen-, Flächen- und Raumausdehnungen der (in unmittelbarer Anschauung

---

1) In der III. Klasse werden nämlich auch behandelt: „Anfänge der allgemeinen Arithmetik als abschließende Zusammenfassung des bisherigen Rechenunterrichtes; Darstellung der Rechengesetze in Worten und Buchstaben, . . .“ usw.

und beim Zeichnen in verjüngtem Maßstab) als ähnlich erkannten Figuren und Körper mit der ersten, zweiten und dritten Potenz, der zweiten und dritten Wurzel von Bestimmungsstücken. Einfachste Bestimmungsgleichungen, soweit die planimetrischen und stereometrischen Rechnungen dieser Klasse auf sie führen.

[Dazu in Realschulen geometrisches Zeichnen: Fortsetzung und Erweiterung der Übungen der II. Klasse.]

Das einzuschlagende Lehrverfahren wird in Form guter Ratschläge ausführlicher dargestellt in den berühmten, weil höchst beachtenswerten „Instruktionen für den Unterricht" (Wien 1899 und 1900) und zwar in dem Bande für Gymnasien S. 209 bis 244, in dem für Realschulen S. 136 bis 158 und S. 231 bis 268.

Auch in anderen Ländern Europas — um nur von diesen zu reden — hat der Gedanke, den wissenschaftlichen geometrischen Unterricht auf Grund der Anschauung und sonstiger Selbstbetätigung, und zwar sowohl von Knaben als auch von Mädchen, passend vorzubereiten, Wurzel gefaßt und hat mehrere literarische Erzeugnisse hervorgebracht, die unsere volle Beachtung verdienen. Als Beispiel der Auffassung und Gestaltung solchen Unterrichtes seien die folgenden angeführt.

In England hat man in den letzten Zeiten damit begonnen, abzulassen von der allgemein herrschenden Benützung des Euklid selbst im Unterricht und von der streng dogmatischen Lehrweise zumal für jüngere Schüler. Einen mehr praktischen Zug hat besonders der Ingenieur Perry in den Unterricht gebracht (Nr. 126).[1]) In einer Reihe von Schriften und zumal Vorträgen ist er gegen die alteingebürgerte Weise des Elementarunterrichtes seines Heimatlandes aufgetreten. Dort wird auch jetzt noch der Unterricht in Geometrie vorwiegend entweder nach Euklid gegeben oder nach Büchern, die unter dessen unmittelbarstem Einfluß stehen. Dem entsprechend ist der einführende Unterricht meist „ein einseitig abstrakter und logischer; die Entwicklung einer lebendigen Anschauung der geometrischen Gebilde ist daneben in den Hintergrund getreten und verkümmert. ..." Perry hat nun dahin gestrebt, die Methoden des elementaren und mittleren mathematischen Unterrichts dem durchschnittlichen Verständnis der Schüler besser anzupassen und für die Anwendungen, namentlich im Gebiet der Technik, tauglicher zu gestalten. ... Er will aus dem Elementarunterricht möglichst alle diejenigen Gegenstände verbannen, die ein mehr abstraktes und logisches Interesse haben."[2])

---

1) Dazu in entsprechender Art: J. Perry, Höhere Analysis für Ingenieure. Deutsche Bearbeitung durch Fricke und Süchting. Leipzig, Teubner. 1902. 8°. 423 S.

2) Fricke (Nr. 113), S. 284, 285, 288.

Für den geometrischen Vorbereitungsunterricht sind besonders zwei Bücher vorbildlich geworden.

Das eine (Nr. 105) ist von J. G. Hamilton und F. Kettle verfaßt, von denen der erstere bezeichnenderweise Lehrer an einer Fröbelschen Erziehungsanstalt ist. Die Verfasser erklären es als „jetzt allgemein anerkannt, daß die beste Vorbereitung für die gewöhnliche deduktive Geometrie ein einleitender Lehrgang ist, der sich auf genaues Zeichnen und Messen stützt und durch einfache Versuche und Zahlenbeispiele erläutert und zugleich derart durchgeführt wird, daß die Einsicht des Schülers ununterbrochen in Übung bleibt“. Sie beginnen ihren Unterricht nach rein äußerlicher Betrachtung von wenigen körperlichen Dingen mit dem Erkennen und Messen von Linien und Winkeln unter gelegentlicher Beihilfe des Papierfaltens, sie betrachten darauf die Lage zweier, dann dreier Geraden unter Benützung der Bewegung und steten Messens und Zeichnens; hierauf lassen sie ähnlich die gegenseitige Bedingtheit von Seiten und Winkeln eines Dreiecks erkennen und ermitteln ebenso noch den Inhalt einfacher Figuren und Körper.

Das zweite der als Beispiele zu erwähnenden Bücher (Nr. 134) ist von Grace Chisholm Young und W. H. Young verfaßt und zwar unter Beihilfe eines erfahrenen Mannes verfaßt von einer Mutter zum Unterricht ihres eigenen Kindes; es ist also wesentlich für das Haus und für ein frühes Lebensalter (von etwa 8 Jahren) bestimmt und will bei diesem eine gewisse Gewandtheit in der Beurteilung von Form und Lage der Körper erzielen, die man als „geometrischen Instinkt“ bezeichnen kann. Das angewandte Verfahren benützt neben dem Zeichnen hauptsächlich das Papierfalten und führt bis zum pythagoreischen Lehrsatz und zur Betrachtung der einfacheren ebenen und räumlichen Gebilde. Der eingehaltene Lehrgang wird weiterhin gelegentlich erwähnt werden (§ 50).

In Frankreich hat vor kurzem C. A. Laisant, Professor an der polytechnischen Schule zu Paris, ein „den Freunden der Kinderwelt“ gewidmetes Büchlein herausgegeben (Nr. 119), das Erziehern, besonders Müttern, Anleitung geben will, 4 bis 11jährige Kinder in die Grundlagen der Mathematik einzuführen. Das Kennzeichnende ist auch hier das Streben nach möglichster Anschaulichkeit, verbunden mit Weckung der Wißbegier durch Reizung der Neugier. So anerkennenswert das Bestreben dieses Versuches ist, so scheint er mir doch über den Umfang einer „Einführung“ etwas hinauszugehen.

Endlich in Italien sind erst neuerdings (1909) „Elemente der Anschauungsgeometrie“ von G. Veronese veröffentlicht worden (Nr. 121), die, in drei Stufen der Schwierigkeit oder Ausdehnung abgefaßt, zeigen, daß dort auch hochstehende Mathematiker diesem Zweige des Unterrichtes ihre Teilnahme und Geisteskraft widmen.

25. Zum Schlusse des vorstehenden Berichtes über die geschichtliche Entwickelung unseres Gegenstandes dürfte es sich empfehlen, die mannigfaltigen Versuche, die gemacht worden, die verschiedenen Wege, die zur Durchführung eines geometrischen Anschauungsunterrichtes eingeschlagen worden sind, hier nochmals im Überblick vorzuführen und sie vor dem geistigen Auge vorüberziehen zu lassen.

Wir haben gesehen (S. 15 ff.), daß Pestalozzi und seine nächsten Nachfolger „zur Entwickelung des Begriffes der Maßverhältnisse Kunstmittel erfanden, welche die Naturkraft zur Verdeutlichung der Vorstellungen von den Maßverhältnissen verstärken“ sollten. Als solche Mittel verwandten sie die Strecke und das Quadrat; letzteres wünschte dann Herbart durch „das wahre Element aller Form, das Dreieck, ersetzt“ (S. 20 ff.). Graßmann hebt hervor (vgl. oben S. 32 f.), daß er „überall die unendliche Linie der Construction zum Grunde gelegt“ habe; Simon seinerseits wünscht (Nr. 115, S. 116), „jeder Anschauungsunterricht solle mit dem Rechteck beginnen“, sein eigener Lehrgang geht aber gleichwohl „vom Klassenzimmer als einem bestimmten geschlossenen Raum aus“, und das Rechteck wird darin erst nach einem Vierteljahr Unterricht erwähnt (S. 282). Harnisch verwarf solche „Beschränkung auf Strich- und Flächenanschauungen“ (S. 42), und er ist (außer K. v. Raumer) der erste, der in Anlehnung an diesen die „Körper-Anschauungen“ als Grundlage hinstellte und durchführte. Die Betrachtung von Körpern als Beginn des geometrischen Unterrichts haben dann die österreichischen Gymnasiallehrpläne von 1850, wie es scheint, erstmals amtlich durchgeführt (Nr. 17 u. 18), und diese Gestaltung sowie die Schaffung eines an die Körperbetrachtung sich anlehnenden eigenen mehrjährigen geometrischen Anschauungsunterrichtes als Unterstufe, diesen Ruhmestitel österreichischer Schulpraxis, hat man dort seitdem grundsätzlich beibehalten und stets bessernd immer weiter ausgestaltet. Leider ist für die volle Entfaltung des Planes, insbesondere für ausreichendes Zeichnen und Modellieren, die Zahl von nur 3 [für Rechnen und Geometrie bestimmten] Wochenstunden doch zu gering, und an verschiedenen Stellen drängt auch der Plan allzu früh auf den eigentlichen, sog. wissenschaftlichen Geometrieunterricht hin. — In den Grundgedanken mit den österreichischen Lehrplänen übereinstimmend, aber im einzelnen methodischer ausgeführt sind die Vorschläge, die in neuester Zeit Höfler zu einer „Vorschule der Raumlehre“ gemacht hat (Nr. 137, S. 94 ff.). Mit ihnen deckt sich in mancher Beziehung die Ausführung, die ich selbst weiterhin zu machen habe, und ich kann nur meine Freude darüber aussprechen, daß wir beide unabhängig voneinander zu unseren im wesentlichen übereinstimmenden Auffassungen gekommen sind. (Vgl. das Vorwort zur vorliegenden Schrift.)

Den erwähnten neuen Gedanken von Raumer-Harnisch (S. 35ff.), mit der Betrachtung von Körpern zu beginnen, haben dann andere in mannigfaltiger Abwechslung der Einzelausführung ausgebaut: so begann trotz Zerrenner (mit dem Punkt) Zeller mit der Pyramide, Graser mit dem Modell eines Wohnhauses, Widmann mit dem Buch, Tobler mit dem Lineal, Wittstein wieder mit Dreieck und Kreis, Scherr ging aus von der Wandtafel u. dgl.; Palmer entschied sich zwar für den Beginn mit dem Körper, fügte aber alsbald hinzu, daß „die eigentliche geometrische Vorstellungsfähigkeit doch erst da beginne", wo sie Pestalozzi und Zerrenner beginnen lassen; Ludwig möchte am liebsten „nicht verfertigte Körper, sondern natürlich-gewordene, also deutlich ausgeprägte Normalkrystalle des regulären Systems zugrunde legen (Centralorgan 6 [1878] S. 114); Thaer seinerseits verwirft das Beginnen mit Körpern, das Böttcher verteidigt (HZ. 29 [1898], S. 378). Schubert fügt dann den bis dahin fast allein gebrauchten Körpermodellen die Flächenmodelle hinzu und zeigt deren Bedeutsamkeit auf sowohl bei der Betrachtung der ebenen Figuren, der Flächenwinkel und Raumecken, als auch in der Verwendung als Hilfsmittel bei anschaulichen Beweisen für geometrische Lehrsätze.

Im wesentlichen wurde aber trotz mancherlei Einreden das Beginnen mit der Betrachtung von Körpern beibehalten; doch war der Gang im einzelnen und die Auswahl der benützten Körper und die Art ihrer Benützung recht verschieden. So verwendet Bohle (Nr. 83) Würfel (Quadrat), Kugel und Zylinder (Kreis), Tetraeder (gleichseitiges Dreieck, dann gleichschenkeliges und rechtwinkeliges Dreieck, anschließend Winkel, beliebiges Dreieck, dann Viereck und Vieleck). Dagegen wählt Börner (Nr. 43) als Reihenfolge Kugel (Kreis, Längenmessung), Würfel, (Quadrat), gerade Quadratsäule und gerade Oblongsäule (Rechteck), Rhomboeder (Rhombus), schiefe Rhombsäule und schiefe Rhomboidsäule (Rhomboid, Parallelogramm, Dreieck, Flächen- und Körpermessung). Schotten (Nr. 89, I, S. 43 Anm.) will Würfel, Kugel und Walze als Ausgang wählen, während Junghänel (Beil. z. Jahresber. d. Realsch. I. O. zu Döbeln, 1879) hierzu Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Pyramide, Prisma, Zylinder, Kegel, Kugel verwendet wissen will. Neuerdings möchte Walther (Nr. 130, S. 11) „stärker betont wissen, daß die Geometrie dem Anfänger keinen neuen Stoff, sondern nur eine neue Art bringt, diesen Stoff anzusehen. Die wohlvertraute nächste Umgebung, das Zimmer, die Straße, der eigene Körper, bilden das Gebiet, auf dem der Schüler geometrische Entdeckungsfahrten zu machen und von dem er die geometrischen Grundbegriffe heimzubringen hat. Fertige geometrische Gebilde, wie Würfel u. a. ihm gleich vorzuzeigen, halte ich nicht für angemessen; das unterbindet die wichtigste Tätigkeit, die der Abstraktion."

Auch O. Fischer (Nr. 29) pflichtet dem Ausgehen vom Körper bei, glaubt aber, „am sichersten werde sich der Schüler die nötigen Erfahrungen über die räumlichen Gebilde sammeln, wenn er diese selber macht, also zuerst ebene Gebilde zeichnet: der Unterricht in der geometrischen Formenlehre ist zugleich Unterricht im geometrischen Zeichnen“. Dieser wichtige Gedanke wurde in der Folgezeit nicht immer befolgt; dies war z. T. dadurch bedingt, daß amtliche Verfügungen die Trennung der geometrischen Formenlehre vom Fach „Freihandzeichnen“ forderten. So behandelt der durch seine theoretischen Darlegungen (Nr. 31 u. 22) bekannt gewordene K. Fresenius nacheinander Würfel, 3- und 6-kantige Säule, 4-, 3-, und 6-kantige Pyramide, Walze, Halb- und Viertelswalze, Kegel, Kugel- und Halbkugel und gibt nachfolgend eine „Orientierung unter den räumlichen Begriffen“, aber das Zeichnen unterbleibt bei den Übungen. Und auch Zizmann (Nr. 32) und Roßmanith (Nr. 55) legen den Hauptnachdruck auf die Betrachtung von Körpern und geistiges Erfassen ihrer Beziehungen und der Beziehungen ihrer Teile zueinander: Zizmann behandelt den Würfel, den regelmäßigen 4- und 8-Flächner, die aufrechte quadratische Pyramide und das regelmäßig 6-seitige Prisma und auch die einfachsten Verhältnisse ihrer Größe, dann zieht er den Strahlenbündel und dessen Verbindung mit Körpern herbei und widmet noch eine kurze Betrachtung den krummflächig begrenzten Körpern; Rosmanith führt seine Grundbetrachtungen vereinfacht der Reihe nach an Würfel, Quader, gerader quadratischer Pyramide, geradem regelmäßig sechsseitigem Prisma, an Zylinder, Kegel und Kugel durch und fügt dann zusammenfassende Betrachtungen über die Grundgebilde in der Ebene, darauf über solche des Raumes bei. Aber beide Schriftsteller erstreben fast nur Auffassungen von Formen und Lagebeziehungen und deutliches Aussprechen des Erfaßten; ein nachfolgendes oder stets eingeschobenes Zeichnen seitens der Schüler unterbleibt fast ganz.

Im Gegensatz hierzu verlegt O. Fischer (Nr. 29) die Hauptarbeit in das Zeichnen, und zwar verwendet er hierzu ganz besonders das schon von Diesterweg, Gruber, Ramsauer u. a. empfohlene Diktieren des zu Zeichnenden, ein Verfahren, das er auch „die Methode des volkständigen Textes“ nennt[1]) (ebenda S. 399).

In ganz anderer Weise ist Falke vorgegangen (Nr. 30) und hat damit erneut einen Weg der Einführung beschritten, den lange vorher schon Clairaut (1741) gegangen war, derselbe Methodiker, der wohl

1) Als Beispiel möge der Anfang des folgenden Diktates gelten: „Ziehe auf deinem rechteckigen Papier die beiden Diagonalen, trage von deren Schnittpunkt aus auf ihnen (in Zentimetern gegebene) Strecken ab, verbinde die gewonnenen Punkte, halbiere die Seiten des entstandenen Vierecks, verbinde die Gegenmittelpunkte, trage dann . . . ab und ziehe . . .“

zuerst bewußt in der Geometrie die sog. genetisch-heuristische Methode angewandt hat. Falke weist darauf hin, daß „die Menschheit an Aufgaben des Feldmessens die Gesetze des Raumes entdeckt hat“ (was freilich nur teilweise richtig sein mag) und daß „der naturgemäße Weg für das Individuum wie für die gesamte Menschheit ein und derselbe sein muß“ (?), daß also auch „nur die Gründung der Geometrie auf praktische Probleme aus der Geodäsie oder eine ähnliche Methode die rationelle ist“. Falke verwirft die aufgekommene einseitige Betonung der „Anschauung“; zu ihr müßten die weiteren Grundforderungen der „Arbeit“ und des „Interesses“ hinzukommen, und diese in gegenseitiger Durchdringung müßten im Dienste der Jugend verwendet werden; die Schule habe nicht die Theorie um der Praxis willen, sondern die Praxis um der Theorie willen zu betreiben. Auf Grund mehrjähriger Erfahrung im Unterricht von 10- bis 12jährigen Knaben besteht demgemäß seine Einführung in einer „Vorbereitung zum geometrischen Abstrahieren durch instinktive Lösung geodätischer Aufgaben“: er läßt mittels Meßtisch ein kleineres Gebiet im ebenen Gelände als Karte aufnehmen, führt die Benützung des Winkels und das Überdecken der Flur durch ein Dreiecksnetz sowie das Flächenrechnen hinzu, und er geht dann erst von solcher Praxis zur geometrischen Abstraktion über und behandelt in Anlehnung an die gemachten Erfahrungen die üblichen grundlegenden geometrischen Dinge.

In eigentümlicher Weise, freilich für gehobene Volks- und Mittelschulen, wünschen P. Martin und O. Schmidt in ihrer gemeinsam verfaßten Schrift (Raumlehre für Mittelschulen. Nach Formengemeinschaften bearbeitet. Berlin. 1896—1898.) die ersten geometrischen Belehrungen angeknüpft an die sinnenfälligsten Raumanschauungen der nächsten Umgebung des Kindes: sie bieten „eine Sachgeometrie nach Formengemeinschaften“ und zwar diese in drei Stufen. Die erste Stufe ist dem Wohnhaus und der Kirche gewidmet. Bei ersterem werden nacheinander der Stubenraum, dessen Fußboden sowie Baufläche und Baugrube und die verschiedenen Arten der Dächer behandelt und jeweils anschließend der Quader, das Rechteck und Quadrat, die verschiedenen Arten dreiseitiger Prismen und Dreiecke; bei der Kirche kommen die quadratische Säule und Pyramide, die Turmuhr und die verschiedenen Kirchenfenster zur Betrachtung und jeweils anschließend Kreis- und Winkelteilung, regelmäßiges Sechs- und Achteck sowie Rund- und Spitzbogen, auch Drei- wie Vierpaß. — Die zweite Formengemeinschaft ist die Feldmark in der Erscheinung als Acker (Wiese) und Wald; hier werden die Deckungsmöglichkeiten bei Dreiecken, die Vierecke, Trapez und Zylinder, Vieleck und Flächenverwandlung angeschlossen, sowie Kegel, pythagoreischer Satz, schiefe Ebene und Grundriß, auch die Heronische Formel. — Als

dritte Arten von Formengemeinschaften werden die Kulturstätten behandelt in der Erscheinung als Werkstätten (Kegelkugel, Kessel, Maßwerk, Steinsockel, Trichter, Waschwanne, Schornstein, Gasometer) und als Verkehrswege (Landstraße, Bahndamm, Wegrampe, Brückenbogen, Bahnkurve und anschließend Sinus und Tangens des Winkels, Winkel und Gleichung des Kreises u. ä.); die Betrachtung der Erde (Horizont, Erdzonen) liefert die Verhältnissätze beim Kreis und die Fläche der Kugelzone.

Zweiter Abschnitt.

Forderung eines sachgemäßen geometrischen Anschauungsunterrichtes als Unterstufe und Begründung dafür.

26. Der erste Abschnitt hat die wie natürlich auf das 19. Jahrhundert beschränkte Geschichte des geometrischen Anschauungsunterrichtes dargelegt. Es wurde gezeigt, wie der große Schweizer Pestalozzi den Anstoß zu diesem neuen Unterrichtszweig gegeben, wie er und seine nächsten Nachfolger die ersten, freilich ungeschickten Versuche praktischer Gestaltung angaben und ausführten, wie dann mit großem Eifer und emsiger Betriebsamkeit hauptsächlich die Volksschule sich des neuen Unterrichts- und Erziehungsmittels bemächtigte und es, ebenfalls nicht immer geschickt, ausgestaltete, wie einzelne Theoretiker die Sache tiefer begründeten und befürworteten, wie endlich auch einzelne Lehrpläne höherer Schulen die Einwirkung des neuen Geistes verspüren ließen, aber diesem freilich fast nur widerwillig Einlaß gewährten. Die Geschichte des geometrischen Anschauungsunterrichtes zumal in den höheren Schulen läßt erkennen, wie schwankend, besonders in den bezüglichen amtlichen Verfügungen, die Ansichten über die Notwendigkeit, Ratsamkeit oder Zulässigkeit und Fruchtbarkeit eines solchen Unterrichtes gewesen sind. Und während z. B. in Preußen ein geometrischer Vorkurs erstmals 1870 eingeführt worden ist, bestand ein solcher in Schweden schon 1820.[1]) Die Meinungen über die Vorteile dieses Unterrichtes bei den literarischen Vertretern des Faches zeigen wiederholt ein Auf und Ab, ein Mehr oder Minder in der Betonung, ein Tasten und eine ziemliche Unsicherheit in der Umfangsbestimmung wie in der Einzelausführung des Gegenstandes; immerhin kann als feststehend angenommen werden, daß seit der Mitte, besonders gegen das Ende des 19. Jahrhunderts in immer weiteren Kreisen die Auffassung Platz gegriffen hat, daß ein den höheren, d. h. den wissenschaftlichen geometrischen Unterricht

---

1) Vgl. Hallgren und Göransson: „Die Mathematik an den schwedischen Realschulen“ 1910 (Sonderabdruck aus Paedagogisk Tidskrift).

vorbereitender sog. Anschauungsunterricht eine unbedingte Notwendigkeit ist. Freilich spricht sich diese ihrer selbst sicher gewordene Meinung bis jetzt noch wesentlich nur in literarischen privaten Kundgebungen aus; in Deutschlands Schullehrplänen hat sie sich nur vereinzelt zu bindenden Vorschriften verdichtet; vor allem die Gymnasien sind von der jetzt ein Jahrhundert alten Neuerung noch wie völlig unberührt. Jedenfalls ist in den heutigen amtlichen Lehrplänen für einen solchen Unterricht noch nicht einmal die Frage des „Ob“ allgemein bejaht; gar über das „Wie“, über dessen Ausdehnung und Gestaltung bleibt bei der Allgemeinheit und Unbestimmtheit der betreffenden Vorschriften das Meiste den einzelnen Schulen oder noch enger innerhalb dieser den einzelnen, zudem so oft wechselnden Lehrern überlassen.

Bei solcher Sachlage — das darf man wohl sagen — erscheint eine allseitige gründliche Erörterung des vorliegenden Gegenstandes wohl angezeigt, und dies um so mehr, als sich auffallenderweise die öffentliche Erörterung in den Zeitschriften nur wenig damit beschäftigt hat, soweit die höheren Schulen dabei in Betracht kommen: in den 24 Bänden des Zentralorgans für die Interessen des Realschulwesens (1873—1896) findet sich nicht ein einziger Aufsatz darüber; die Hoffmannsche Zeitschrift kommt in ihren 40 Jahrgängen (1870—1909) nur sechsmal darauf zu sprechen (abgesehen von den zwei Aufsätzen Hoffmanns selbst, die Vorabdrücke aus seiner „Vorschule“ Nr. 42 sind); die mehr als 100 Hefte der „Lehrproben und Lehrgänge“ 1885—1910) behandeln den Stoff dreimal in kleinen Aufsätzen; das Pädagogische Archiv widmet der Sache (aber eigentlich mehr der Frage der Axiomatik) in den 36 Jahrgängen von 1874—1909 einen einzigen Aufsatz und diesen erst 1908; die 15 Jahrgänge der „Unterrichtsblätter“ des sog. Förderungsvereines bringen an vier Stellen Mitteilungen von dreien ihrer Mitarbeiter; die Zeitschrift für Gymnasialwesen enthält in ihren 20 letzten Jahrgängen im wesentlichen nur drei kleinere Aufsätze über unseren Gegenstand, während ihr Generalregister über die ersten 40 Bände (1847—1886) trotz der ziemlich weit geführten Gliederung nicht einmal die betreffende Überschrift enthält und nur wie verloren den Aufsatz von Kosack (Nr. 20, aus dem Jahre 1852) erwähnt; endlich die Neuen Jahrbücher für Pädagogik (seit 1898) enthalten gar nichts über unseren Gegenstand.

Man mag aus diesen statistischen Mitteilungen entnehmen, daß die Teilnahme der „höheren“ Mathematiklehrer an unserem grundlegenden und eben deshalb so überaus wichtigen Unterrichtszweig nicht eben sehr groß gewesen ist, vermutlich weil dieser vielfach den Anfängern im Lehramt oder anderen aushelfenden Kräften überlassen war. Und wenn das im „Anhang“ (am Ende des Buches) folgende

Verzeichnis von bezüglichen Schriften auch viele Nummern enthält, so bieten diese eben doch fast durchweg keine eingehende und grundsätzliche Behandlung der Sache. Trotzdem oder eben deshalb scheint mir eine eingehende Erörterung der Bedeutung und eine Darlegung des wünschenswerten Betriebes des geometrischen Anschauungsunterrichtes recht wohl zeitgemäß, ja unbedingt notwendig. Denn auch jetzt noch gilt das Wort von Lichtenberg (Nr. 23), daß „kein Teil des mathematischen Unterrichtes ist so viel bearbeitet und doch keiner noch so wenig angebaut worden als gerade der allererste, die Vorstufe zu dem eigentlich wissenschaftlichen“.

So möchte ich denn jene eingehende Erörterung über unseren Gegenstand im folgenden versuchen. Hierzu ist es aber notwendig, zunächst Gestaltung und methodischen Betrieb des heutigen geometrischen Unterrichtes an unseren höheren Schulen sich zu vergegenwärtigen; dies aber setzt wiederum voraus, den heute vorhandenen Zustand als eines Gewordenen kurz aus seinem Werden zu begreifen.

27. Als man in den letzten Jahrhunderten mehr und mehr geometrischen Unterricht in den höheren Schulen einführte, hatte man im wesentlichen kein anderes Lehrbuch zur Verfügung und — von vereinzelten Ausnahmen abgesehen — wollte man auch kein anderes als die „Elemente“ des Euklid. Aus ihnen entnahm man Stoff, Umfang und Methode. Anfangs nur an den Inhalt des 1., wohl auch des 2. Buches sich haltend, nahm man nach und nach, sehr langsam den Unterricht erweiternd, den Inhalt des 3. und 4., des 5. und 6. Buches Euklid in den Lehrplan und in die Unterrichtsdurchführung auf, dann fügte man weitergehend, die arithmetischen Bücher überspringend oder kurz rechnerisch erledigend, die die Raumgeometrie betreffenden Lehren des 11. und 12. Buches sowie das Wesentliche des 13. Buches hinzu. Nun enthält — was hier besonders hervorgehoben werden muß — das 11. Buch die Lehre von den Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen zueinander, dann die Lehre vom dreikantig körperlichen Eck sowie vom Parallelflächner; das 12. Buch aber enthält die Vergleichung der Inhaltsmaße der bekannten einfachen Körper, während das 13. Buch den einem Kreis eingeschriebenen regelmäßigen Vielecken und den regelmäßigen Körpern gewidmet ist.

Indem der Gymnasialunterricht, als er überhaupt anfing, der Mathematik mehr Beachtung zu schenken, das Werk des Euklid als Führer und Lehrbuch übernahm, ihm anfangs sklavisch folgend, später doch jedenfalls ziemlich eng sich daran anlehnend, übernahm man in den Unterrichtsbetrieb auch vier Dinge, die für diesen Betrieb kennzeichnend wurden, lange scharf kennzeichnend geblieben und dies zum guten Teil noch heute sind. Diese vier Merkmale geometrischen

Unterrichtes sind: 1) der bekannte viel gerühmte und nicht selten hart geschmähte streng dogmatische Lehrvortrag, 2) die scharf durchgeführte Trennung der allgemeinen Raumgeometrie von der ebenen Geometrie, 3) die Rückschiebung der Raumbetrachtungen gegen das Ende des ganzen üblichen Lehrganges und 4) die Voranstellung der abstrakteren Lehren über Geraden und Ebenen vor die Betrachtung der körperlichen Raumgebilde.

Diese vier Eigenheiten mögen große Vorzüge des gerühmt logischen und systematischen Aufbaues des Euklidschen Lehrgebäudes sein und haben gewiß außerordentlich viel beigetragen zur Ausbildung der Mathematik als Wissenschaft, — aber Vorzüge eines Unterrichtsverfahrens für jüngere Schüler sind sie gewiß nicht. Im Gegenteil, die Schulerfahrung von Jahrzehnten, wohl eines Jahrhunderts, hat gelehrt, daß jene Eigenheiten, auf den Unterricht von Schülern der unteren und mittleren, zum Teil der oberen Klassen übertragen, ebenso viele Nachteile und Schädigungen eines gesunden, natürlichen Unterrichtsganges sind[1]), und gerade sie haben lange mit dazu beigetragen, daß der mathematische Unterricht der sog. Gelehrtenschulen weithin gering geschätzt, gefürchtet oder verachtet war und daß sich die

1) Es empfiehlt sich als ein Beispiel für viele übereinstimmende Lehrerfahrungen das folgende Urteil eines praktischen Schulmannes aus der neuesten Zeit anzuführen. M. Schuster sagt (Lehrproben 62 [1900], S. 90): „. . . Auch das Halbieren, Verdoppeln, An- und Übertragen eines räumlich gegebenen Winkels wird zweckmäßig zunächst mechanisch erklärt und geübt; sonst muß man z. B. schon die ersten Sätze vom gleichschenkeligen Dreieck auf die ganz abstrakte Vorstellung einer nur „gedachten" Hilfslinie stützen, über deren wirkliche Herstellung der Schüler sich gar keine Rechenschaft zu geben imstande ist. Ganz ähnlich liegt die Sache bei den Kongruenzsätzen. Werden diese in ihrer abstrakten Form an den Anfang der Dreieckslehre gesetzt, so wird damit an den Schüler die Zumutung gestellt, die Bedingungen für einen Zusammenhang zu untersuchen, der ihm tatsächlich noch gar nicht vorgekommen ist, ihm vielmehr ganz unvermittelt als eine künstliche Forderung entgegentritt, deren Zweck er nicht abzusehen vermag. Dazu kommt dann die abstrakte Form der Beweise: da muß die Figur (in Gedanken!) erst verschoben, dann gedreht, inzwischen nötigenfalls auch noch umgeklappt werden; weiterhin gar der vielverschlungene indirekte Beweis des Falles ($ab\alpha$) mit seinem Labyrinth von Unwahrscheinlichkeiten, die doch der Schüler zuerst alle als „möglich" anerkennen soll, bis das letzte erlösende Wort ertönt: „also kann es doch nicht sein!" Wer diese „Beweise" jemals im Anschluß an Kambly, Reidt, Spieker u. a. m. mit Quartanern „gepaukt" hat, der weiß, welch kostbare Zeit damit verloren, tatsächlich verloren wird: denn der erzielte Gewinn steht zu ihr in gar keinem Verhältnis. Nur wenige Schüler sind im stande, den Gang der Entwickelung zu verfolgen, kaum einer kann ihn selbständig wiedergeben, und wirklich verstanden wird er überhaupt erst, wenn er nach einer genügenden Reihe von einfacheren Inversionen später einmal wiederholt wird." — Wie Herbart sagt: „Der Wert strenger Beweise wird nur dann erst vollständig erkannt, wenn man in der Sphäre von Begriffen, wohin sie gehören, schon einheimisch ist."

Mär herausgebildet hatte, zum Schulbetrieb der Mathematik müsse der Schüler „besonders beanlagt“ sein.

Diese mit Euklid als Lehrbuch in die deutschen Schulen mitübernommenen Eigenheiten und Merkmale zumal des geometrischen Unterrichtes hat man wenigstens zum Teil nach und nach als Mißstände erkannt, oder man ist auf dem Wege, sie als solche zu empfinden. So ergaben und ergeben sich mehr oder minder kräftige Bewegungen zur Beseitigung oder Abschwächung dieser Mißstände.

Als zeitlich erste und wohl erfolgreichste Bewegung zur Verbesserung des bezüglichen Unterrichtsverfahrens ist in die Erscheinung getreten das Ankämpfen gegen das starre oder, wenn man so sagen darf, halbstarre dogmatische Verfahren im Übermitteln der Lehrsätze. Das zweite und dritte Viertel des 19. Jahrhunderts umschließt die Zeit, in der das entwickelnde, das genetische Verfahren im Geometrieunterricht aufkam, Boden gewann und zuletzt sich durchsetzte, so daß man es heute wohl bei uns als herrschend bezeichnen kann.

Weniger allgemein und unbedingt durchgesetzt [1]), wenn auch, wie es scheint, erfreulich verbreitet hat sich im sog. stereometrischen Unterricht die Zurückstellung der Lehre von den Lagebeziehungen der Geraden und Ebenen zueinander hinter eine (etwa auch mit Zeichnen verbundene) Erstbetrachtung von körperlichen Gebilden, und wenn auch die Lehrbücher eine solche Umstellung des Stoffes nicht immer darbieten, so führt sie der lebendige Unterricht doch wohl oft genug durch.

Ganz anders verhält es sich aber mit den zwei übrigen der angegebenen Eigentümlichkeiten des in unseren höheren Schulen üblichen Geometrieunterrichtes. Die innige Verschmelzung der körperlichen und der ebenen Geometrie, die „Fusion von Planimetrie und Stereometrie“, oder wenigstens die Durchsetzung der Lehre über ebene Gebilde mit Einschiebungen, d. h. die Durchsetzung jener mit entwickelnden Betrachtungen, die von allgemein räumlichen Gebilden ausgehen, ist in Deutschland fast noch unbekannt, wohl kaum irgendwo praktisch gepflegt; vereinzelte dahin zielende Versuche in Buchdarstellungen sind bei uns fast völlig unbeachtet geblieben.

Endlich, die Zurückschiebung des Unterrichtes in Raumgeometrie gegen das Ende des Schullehrganges, also hinter die völlige Erledigung der ebenen Geometrie ist heute noch wie vor hundert Jahren die allgemeine Regel [2]), wenn man von den wenigen

---

1) So sagt z. B. auch Cantor (Gesch. d. Math. I³, S. 271): „Im 11. Buch des Euklid beginnt die Stereometrie genau in der Weise, wie sie auch heute noch behandelt zu werden pflegt.“

2) Als Wortführer der solches Tun vertretenden Lehrer kann z. B. Ziegler gelten, der sich 1871 dahin aussprach (H. Z. 2, S. 51): „Von der Formenlehre

Lehrplangestaltungen meist sog. realistischer Schulen absieht, die immerhin einen, wenn auch kurzen, auf Körper Bezug nehmenden geometrischen Anschauungsunterricht dem eigentlichen Planimetrieunterricht vorangehen lassen. Aber auch hier, wenn dabei auch vorschriftsmäßig „von der Betrachtung einfacher Körper ausgegangen" werden soll, bleibt es durchgehend bei solchem „Ausgehen" und muß es dabei bleiben; eine wirkliche Beschäftigung mit räumlichen Betrachtungen, ein freudiges mit Vermuten und Schätzen und Messen und Modellieren und Zeichnen verbundenes Zerlegen und Bilden der Raumformen erfolgt kaum; die Lehrer wie die Lehrpläne eilen zu den berühmten „Übungen im Gebrauch von Zirkel und Lineal", können sich aber auch hierbei mangels ausreichender Zeit nicht genügend aufhalten und eilen erst recht zu der vorgeschriebenen und leichter abfragbaren „Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken". Bei solcher rein äußerlichen und nur zu oft recht öden „Formen"-Lehre bildet das Wort „Raum" doch wohl nur eine wesens- und inhaltslose Verzierung der Lehrplanbestimmungen.

Wie aber steht es bei den Gymnasien! Für die in Preußen gilt das von seinen Realgymnasien Gesagte (S. 50); aber in den Gymnasien von Bayern, Württemberg, Baden, Hessen und noch von anderen deutschen Ländern ist entweder überhaupt kein vorbereitender Anschauungsunterricht vorgeschrieben, oder er ist bestimmungsmäßig nur auf die einfachsten ebenen Gebilde beschränkt. Was den hiermit gezeichneten Mißstand noch verstärkt und besonders beklagenswert macht, das ist die Tatsache, daß in deutschen Landen die weitaus größere Zahl von höheren Lehranstalten Gymnasien sind und daß in ihnen auch die überwiegend große Zahl von Schülern unterrichtet wird.

So stehen wir also vor der betrübenden Feststellung, daß die weit vorwiegende Anzahl von Schülern unserer höheren Schulen deren untersten sieben Klassen durchlaufen, ohne Gelegenheit zu erhalten zur Betrachtung von Raumformen und damit zur Übung ihres Raumsinnes, daß sie bis zur Prima gelangen müssen, um etwas über eigentliche Raumgeometrie zu erfahren, ja um auch nur die Oberflächen und Inhalte der gewöhnlichsten Körperformen berechnen zu lernen, also um auf diesem Gebiet die doch so notwendigen Kenntnisse zu erlangen, die man durchweg, in ganz Deutschland von jedem aus der einfachsten Volksschule abgehenden 14jährigen Knaben und selbst Mädchen verlangt, Kenntnisse zudem, die für eine Reihe anderer Unterrichtsfächer innerhalb der Unter- und Mittelklassen unumgänglich

---

gehört ein Teil zum geometrischen Zeichnen, ein zweiter zum arithmetischen Unterricht in den Unterklassen, der Rest ist zu verbinden mit dem gründlichen wissenschaftlichen Unterricht. Dieser kann in Untertertia ohne erhebliche Schwierigkeiten beginnen, muß aber langsam vorschreiten und sich immer auf die Anschauung stützen."

nötig wären. So werden wenigstens die Primaner von den bestehenden Lehrplänen gewürdigt, gewisse Raumkenntnisse zu gewinnen — aber wie viele, vielmehr wie wenige unserer Gymnasiasten gelangen bis Prima! So kommen wir also zu dem Ergebnis, daß die übergroße Mehrzahl der Schüler unserer höheren Schulen überhaupt keinen Unterricht in eigentlicher Raumlehre erhält[1]), daß sie einer Entwickelung ihres Raumsinnes, einer Ausbildung oder Anregung ihrer Raumvorstellung oder Raumphantasie wenigstens im mathematischen Unterricht nahezu vollständig entbehren muß.

Hier tritt klar in die Erscheinung, was die preußische Unterrichtsverwaltung schon 1891 vor aller Welt bekundet und als „Übelstand“ beklagt und damals für unser Gebiet nicht eben mit geschickter Hand abzuändern versucht hat, daß nämlich „trotz der laut redenden Zahlen (der Statistik) bisher alle unseren höheren Schulen so organisiert waren, daß lediglich das Bildungsbedürfnis jener 20% von Schülern, die das Ziel ihrer Anstalten erreichten, für die Gestaltung des Lehrplanes maßgebend war.“ In der Tat, in dieser alle anderen Rücksichten beiseite setzenden Zielbestimmung und zugleich in der seit Jahrhunderten überkommenen Beibehaltung der Euklidschen Stoffanordnung und Reihenfolge liegt der Mißstand oder vielmehr liegen die angegebenen Mißstände begründet, die auch heute noch dem geometrischen Unterricht unserer höheren Schulen anhaften und seine Wirkung beeinträchtigen. Man hat ja freilich die frühere streng dogmatische Behandlung wohl meistens bis zu einem gewissen Grad durch eine genetische ersetzt, man hat das gar zu Abstrakte des Eingangs in das Lehrgebäude durch eine längere oder kürzere, meist kürzere und stets zu kurze „anschauliche“ Einleitung gemildert; aber man geht im wesentlichen auch heute noch an der Hand der Bücher 1 bis 13 des Euklid, in Quarta oder Untertertia beginnend bis Schluß der Oberprima, den einen zusammenhängend, ohne Unterbrechung schräg ansteigenden Weg, den man sich durch den griechischen Altmeister angeben läßt, anstatt sich in erster Reihe durch die Rücksichtnahme auf die Entwickelung und die geistigen Bedürfnisse der Schuljugend sowie auf die praktischen Anforderungen des Lebens innerhalb und außerhalb der Schule bestimmen zu lassen.

28. Diese Rücksichtnahme erfordert anderes, als unsere deutschen Lehrpläne heute fast durchweg angeben und demgemäß unser Unterricht

1) Ausgenommen sind in Preußen diejenigen wenigen Gymnasiasten, welche an Stelle des Griechischen Ersatzunterricht im Englischen erhalten: für sie ist — aber freilich kaum aus Bildungsinteresse, sondern wohl nur zur Unterbringung der überschüssigen Stunden — vorgeschrieben, daß „je eine Wochenstunde in UIII und ObIII auf kaufmännisches Rechnen, elementare Körperberechnung und das Notwendigste über Wurzelgrößen (!) verwendet“ werden soll.

praktisch durchführt. Die Forderungen, die ich aufstelle, sind die folgenden:

a) Der Geometrieunterricht unserer höheren Schulen muß in zwei Stufen erteilt werden, in einer Unterstufe und in einer Oberstufe.

b) Der Unterricht der Unterstufe ist ein „geometrischer Anschauungsunterricht“: er lehnt sich an die Betrachtung von Körpern an, leitet daraus die verschiedenen geometrischen Gebilde ab, formt sie um und gestaltet neue, er benützt und fördert die Selbsttätigkeit der Schüler durch Schätzen, Messen (auch im Freien), Zeichnen und Modellieren, er pflegt die innere Anschauung und die Raumvorstellung und leitet allmählich das anschauliche Erkennen hin zum beweisenden Begründen des Erkannten.

c) Der Unterricht der Oberstufe verwertet die gewonnenen Anschauungen und stellt unter stetem Beizug der Betrachtung körperlicher Gebilde das Lehrgebäude der elementaren Geometrie auf als Muster einer deduktiven Wissenschaft.

Die hier aufgestellten Forderungen sollen nun im nachstehenden begründet werden. Und zwar ist hier zunächst die Notwendigkeit eines ausgedehnteren vorbereitenden geometrischen Anschauungsunterrichtes aus allgemeinen Gründen und in verschiedener Hinsicht zu erweisen, auch den Gegnern Beachtung zu schenken und deren Verfechtern Vertretung ihrer Ansichten zu gönnen, dann ist die Dauer solchen Unterrichtes und seine Lage im Lehrplan festzustellen, endlich sind die Grundzüge seiner Gestaltung darzutun.

29. a) In erster Reihe sprechen für die Notwendigkeit jenes Unterrichtes allgemeine pädagogische Erwägungen. Der gesamte Unterricht zielt ab auf die Erziehung des jugendlichen Menschen; er ist nur eines der Hilfsmittel, welche Natur und Überlegung den Erwachsenen zuweisen, um den heranwachsenden Menschen auszubilden, seine Fähigkeiten zu entwickeln und ihn so zu befähigen, als tätiges Mitglied der Gemeinschaft seinerseits die Kultur seiner Zeit zu übernehmen, sie zu fördern und weiterzugeben. Auch dem mathematischen und hier im besondern dem geometrischen Unterricht obliegt solche allgemeine Aufgabe und Pflicht einer Beihilfe für die Erziehung. Diesem Unterrichtszweig fällt als Stoff seiner Arbeit die Pflege und Verwertung der räumlichen Beziehungen zu, also von Dingen, die in der Erfahrung begründet und nur durch diese zu gewinnen sind. Wie auch Friedlein sagt (H. Z. 3 [1872], S. 408): „Die Geometrie soll so gelehrt werden, daß sie das Anschauungsvermögen und die allgemeine Geistesbildung überhaupt in gedeihlicher Weise fördert.“

Am eigenen Körper und an den Formen der sonstigen Außenwelt hat sich der Mensch seine Erfahrungen gesammelt über die Gestaltungen des Raumes und deren gegenseitige Beziehungen; in steter Überlieferung von Geschlecht zu Geschlecht, durch vielhundertjährige Übung in der Anwendung auf die Bedürfnisse des täglichen Lebens und behufs Unterweisung nachwachsender Jugend wurden aus jenen Erfahrungstatsachen und aus Anschauungen besonderer und allgemeiner Art allmählich auch Begriffe erst gröberen, dann feineren Baues abgeleitet, bis sich der wissenschaftliche logische Trieb des angesammelten Stoffes voll bemächtigt und ihn gestaltet hatte und so die Geometrie als Wissenschaft schuf, wie sie als höchstentwickelte Leistung des Altertums z. B. in den „Elementen" des Euklid seit mehr als zwei Jahrtausenden vorliegt.

So bedarf also, entwickelungsgeschichtlich genommen, die wissenschaftliche Raumlehre als grundlegender Voraussetzung der Tatsachen und geistigen Erfassung der Raumverhältnisse, wie sie durch den Gebrauch der Sinne, durch die sog. Anschauung gewonnen werden. Soll also der nachwachsende Mensch in die Welt der — hier nur nebenbei gesagt, auch praktisch so wichtigen — räumlichen Beziehungen eingeführt, sollen auch nach dieser Seite hin seine Fähigkeiten ausgebildet werden, so muß die bezügliche Unterweisung der Jugend, die in jene wissenschaftliche Raumlehre eingeführt und in ihr etwas heimisch gemacht werden soll, gerade auch die Anschauung zur Grundlage nehmen und muß sie in geregelter zweckdienlicher Weise pflegen und verwerten. Gewiß aber darf dies nicht so geschehen, daß vorerzählt und mitgeteilt würde, was andere Menschen, was frühere Geschlechter auf dem genannten Gebiet durch Erfahrung gewonnen und in eigenen Besitz genommen haben. Vielmehr kann jene Ein- und Weiterführung sinngemäß nur so erfolgen, daß der einzelne Lernende selbst diese Erfahrung sammelt, daß er selbst seine Sinne gebraucht, daß er sehen lernt[1]), daß er auf Grund eigener Anschauung sich die nötigen Grundlagen an Raumvorstellungen verschafft und erringt, um diese nachher durch Verknüpfung und Vergleichung zu läutern und vertiefend sie festzulegen, sei's um sie bei weiteren Studien zu anknüpfender logischer Arbeit verwendbar zu machen, sei's um sie auch ohne letztere als unverlierbaren Besitz fürs Leben zu bewahren — dies alles ganz im Sinne von Herbart, der den Wert des mathematischen Unterrichtes überhaupt davon abhängig machte, wie tief er in das Ganze des Kreises der Gedanken und Kenntnisse des Schülers eingreift. Hierzu müsse aber die Selbsttätigkeit der Schüler in Anspruch genommen werden, und: Sinnliche Vorstellungen in gehöriger Stärke machen die erste Grundlage eines Unterrichtes aus,

1) Schiller, Geschichte der Pädagogik, S. 370.

dessen guter Erfolg abhängig ist von der Art, wie der Zögling die Vorstellungen des Räumlichen innerlich bildet[1]).

Diese vom Schüler selbst zu erwerbende Grundlage zu legen, die ganze Reihe von Raumvorstellungen und deren Verknüpfung von vornherein zu beschaffen, bevor an deren eigentliche mehr wissenschaftliche Verarbeitung gegangen wird, hat man in früheren Zeiten vielfach, ja während Jahrhunderten allgemein versäumt; man ging und mancherorts geht man noch heutzutage unmittelbar an Euklid heran und zwängt alsdann die jugendlichen Geister in die an sich trefflichen, aber für Anfänger durchaus ungeeigneten logischen Formen und Beweisgänge, an Euklids sog. „spanischen Schnürstiefel" und an seine verspotteten „Mausfallenbeweise". Wer darf sich dann darüber wundern, daß bei solchem Gang oft genug die jugendlichen Lerner versagt haben und versagen, daß sie es abgelehnt haben und ablehnen, jenen Weg abstrakten Wissens zu gehen, daß sie in großer Zahl all die Jahrzehnte, wo solcher Unterrichtsgang im Schwange war, neidlos den Lehrer mit wenigen Auserwählten jenen Weg hinaufsteigen ließen und sich lieber in der Niederung an der saftigen Weide sinnenfälliger Anregungen genügen lassen mochten. Durch solches Verfahren, durch den Unverstand von Schulordnungen und Lehrern ist dann auch die Mär aufgekommen und hat sich Jahrzehnte lang wie eine ausgemachte Wahrheit erhalten können, zum Verstehen und Erlernen der Mittelschulforderungen in Mathematik, zumal in Geometrie bedürfe es einer „eigenen Befähigung", die nicht jedem gegeben sei. Und so verfiel die Mathematik als Wissenschaft, mehr noch als Lehrgegenstand einer gewissen Mißachtung, die freilich nicht immer zum Ausspruch kam, aber oft genug als schleichender Widerstand innerhalb des Schulbetriebes sich geltend gemacht hat. Sollte dieser Zustand, wie er noch um die Mitte des 19. Jahrhunderts weit verbreitet bestanden hat und zum Teil darüber hinaus noch heute besteht, und soll dieser Zustand geändert werden, sollte der geometrische Unterricht, wie für alle Schüler verpflichtend, auch für alle gewinnbringend sein, so mußte man die Mathematiklehrer besser vorbilden, und es mußte das Unterrichtsverfahren geändert werden und mehr oder ganz der Entwickelung des jugendlichen Geistes angepaßt und den natürlichen aus seiner Entwickelung erfließenden Forderungen entsprechend eingerichtet werden, d. h.: es mußte dem strengeren geometrischen Unterricht ein vorbereitender, wesentlich auf Anschauung gegründeter, aber doch auch

---

1) Es fordert geradezu den Spott heraus, wenn man Urteile hören muß wie das folgende des altphilologischen Oberstudienrates Schmid aus Stuttgart (H. Z. 1 [1870], S. 74): „Glücklicherweise hat es die Mutter Natur so eingerichtet, daß unsere Knaben von Anfang an sehen lernen. Oder glauben wir, daß wir Schulmeister dies ihnen erst beibringen müssen? In der Schule braucht nicht allzuviel hinzuzukommen."

die allgemeine Bildung fördernder Unterricht in Geometrie vorangeschickt werden. „Die Geometrie (d. h. der Unterricht in Geometrie) muß unbeschadet ihres in den Höhen reiner Abstraktion liegenden Zieles vom sinnlich Gegebenen ausgehen und muß sinnliche Wahrnehmungen und Vorstellungen allmählich zu Begriffen verdichten, unbekümmert darum, daß sie die Grenze der reinen Abstraktion fürs erste weder im ganzen noch im einzelnen erreichen kann“ (Schuster in Lehrproben 62 [1900], S. 89) — oder wie schon Lichtenberg sagte (Nr. 23): „Den Charakter des Unterrichtes der Vorbereitungsstufe sehe ich in der Anschaulichkeit des Stoffes, in der geistigen Unmittelbarkeit, in welche der junge Mensch durch den Unterricht zu demselben versetzt wird, und in der Anregung und Anleitung zu geordneter Selbsttätigkeit, welche jener gewährt.“ Und auch Junghänel (s. S. 65) betont „die Notwendigkeit einer auf Anschauung gegründeten Einführung in das Gebiet der Geometrie“, deren „Vorkursus den Zweck hat, dem Schüler diejenigen Form- und Raumvorstellungen zu verschaffen, die zum Verständnis der geometrischen Lehren unumgänglich nötig sind“.

Dieselbe Forderung ergibt sich, wenn man die Aufgabe von Erziehung und Unterricht ganz allgemein ins Auge faßt. Diese haben als Ziel und demnach als gemeinsame Aufgabe, die Fähigkeiten des heranwachsenden Menschen zu entwickeln und damit deren Leistung zu steigern, um ihn so in den Stand zu setzen, den vorhandenen Kulturstand zu begreifen, ihn in sich zu betätigen und möglichst an dessen Förderung zum Wohl des Ganzen werktätig mitzuarbeiten. Eine solche Aufgabe, bestehend in der Entwickelung und Pflege der Anlagen des jungen Menschen, verlangt aber vor allem die Entwickelung der Sinnestätigkeit, vorab des Auges und der Hand und die Geschicktmachung zur Wiedergabe des Geschauten und Erfaßten im Bild (Zeichnung und Modell) und in der Sprache; daß hiermit zugleich eine stete Anregung zur Ausbildung klarer und deutlicher Anschauungen und Ausdrucksweisen gegeben ist, zugleich der Zwang zum Gebrauch und die Übung im Gebrauche der Phantasie, die fortwährende Ermöglichung der Selbsttätigkeit des Schülers, die Weckung und Belebung regen Interesses und die Beweglichmachung des Geistes, daß dann also die Hauptstücke einer geistigen Zucht mitgegeben sind, das liegt doch wohl auf der Hand — den richtigen, d. h. einen allseitig fördernden Betrieb dieses geometrischen Anschauungsunterrichtes vorausgesetzt So sprechen also für einen solchen Unterricht vor allem starke Gründe in Hinsicht auf das letzte Ziel und den Zweck des Unterrichtes als eines Hilfsmittels und Bestandteiles der Erziehung [1]).

---

1) Es empfiehlt sich, die verwandten Betrachtungen hier anzuführen, die G. Holzmüller veröffentlicht hat (Nr. 96, H. Z. 26, S. 328, 334f. u. 337):

30. b) Aber auch Gründe anderer Art erfordern die Voranstellung eines genügend ausgedehnten geometrischen Vorbereitungsunterrichtes vor den üblichen, im engeren Sinn sog. wissenschaftlichen Unterricht in Geometrie. Diese Wissenschaftlichkeit besteht doch vor allem in der Durchführung eines streng logischen Aufbaues der geometrischen Lehren. Und in dieser Hinsicht fällt nach althergebrachter und allgemein geltender Auffassung überhaupt dem mathematischen Unterricht unserer höheren Schulen gewiß die eine Teilaufgabe zu, seinerseits für die logische Ausbildung der Schüler zu sorgen, diese zu scharfem Denken anzuleiten und ihnen vorbildlich die Mittel zum Erkennen und Dartun gewisser Aussagen als Wahrheiten zu überliefern, sie ihnen einzuprägen und sie so durch Jahre lange Übung in der Verwendung solcher Mittel geschickt zu machen und zu kräftigen.

„Die didaktische Kunst besteht nach meiner Auffassung bei dem vorliegenden Gegenstande darin, den Schüler von der ursprünglichen Anschauung des wirklichen Körpers aus zunächst zu einer verfeinerten Anschauung zu bringen, ihn allmählich zu weiteren und weiteren Abstraktionen zu veranlassen, bis er schließlich den Idealkörper an Stelle des wirklichen Körpers einigermaßen sich vorzustellen im stande ist. Die weitere Übung wird das geometrische Vorstellungsvermögen allmählich zu größerer Vollkommenheit bringen."

„Für mich haben jene Untersuchungen den Erfolg gehabt, mich in der Überzeugung von der Notwendigkeit einer propädeutischen Behandlung der Mathematik zu bestärken und mir die Unmöglichkeit klarzulegen, auf der Unterstufe nach Euklidscher Methode zu unterrichten und zugleich streng logisch und wissenschaftlich zu sein. — Es wäre nicht ohne Interesse, einmal zu untersuchen, ob es nicht auch (wie bei Kirchhoffs bekanntem „Beschreiben" der physikalischen Vorgänge) die Aufgabe der Schulmathematik sein sollte, die Körper usw. zunächst in einfachster Weise zu „beschreiben". Vielleicht käme mehr dabei heraus, als bei einem angeblich strengen und angeblich allen wissenschaftlichen Forderungen genügenden deduktiven Verfahren. Dieses Beschreiben will und soll nichts anderes sein, als ein Aufklären zahlreicher geometrischer Begriffe, Vorstellungen und Beziehungen, die man auf dem Wege der Anschauung gewinnt. Ist erst ein gewisser Reichtum von Begriffen und Vorstellungen vorhanden, und haben sie das Interesse der Jugend gefunden, so kann man den Versuch machen, zu einer mehr wissenschaftlichen Betrachtungsweise überzugehen. Wo Interesse ist, da steigert sich die Kraft des Gedächtnisses und die Auffassungsgabe ganz außerordentlich. Besteht aber der ganze Reichtum von Begriffen nur aus Punkt, Gerade und Winkel, und soll mit diesen vielleicht noch dazu unvollkommen aufgefaßten Begriffen streng logisch operiert werden, dann ist es kein Wunder, wenn unsere Schüler nicht verstehen, was das Ganze will oder soll, und daß sie der langweiligen Arbeit mit den armseligen und inhaltlosen Abstraktionen einen passiven Widerstand entgegensetzen."

„Ich habe . . . nur Propaganda gemacht für einen wirklich propädeutischen Anfangsunterricht in der Mathematik. Auf diesen sollte sich die mathematische Lehrerwelt konzentrieren, um die Methode der Zukunft zu schaffen, ein Ziel, zu dem die Kräfte des Einzelnen nicht ausreichen."

Nun sind aber solche Mittel die Beweise jener Aussagen, und Beweisenmüssen und Beweisenlernen gilt als eine der wesentlichsten Aufgaben höheren Unterrichtes. Die Beweisverfahren in der bekannten euklidischen Weise verwenden aber in kunstreicher Zusammenfügung Schlüsse und Schlußreihen, d. h. auf Grund vorher als richtig erkannter Urteile aus diesen abgeleitete neue Urteile. Wie immer auch nach Inhalt und Form diese Urteile gestaltet sein mögen, sie entstehen nur durch Verknüpfung von Begriffen; diese Begriffe aber sind sprachlich geprägte Zusammenfassungen je einer größeren oder kleineren Anzahl von Merkmalen oder Eigenschaften von Dingen, die der Betrachtung unterstehen. Diese Eigenschaften haben sich ergeben als sog. innere Anschauungen oder Vorstellungen auf Grund der Betätigung und Arbeit unserer Sinne, indem diese letzteren die Anreize der Außenwelt aufnehmen und weiterleiten. Die Grundlage für die vorgenannte Reihe aufeinander aufgebauter bewußter Denkvorgänge bildet also das durch die Sinne vermittelte reichliche Wahrnehmen der Außenweltdinge und ihrer Veränderungen.

Nun sind aber die aus ihnen ableitbaren und abzuleitenden Eigenschaften mathematischer und im engeren Sinn geometrischer Art solche der Größe, der Gestalt, der Lage und der Bewegung. Soll also der Geist jene erwähnten Denkarbeiten überhaupt ausführen, soll er sie gar gut und gewandt vollführen, so muß die Grundlage, auf welcher der ganze weitere Aufbau beruht, also die Auffassung der genannten vier Eigenschaftsgruppen in genügender Breite und Stärke vorhanden sein, d. h. es müssen die durch sinnliches Wahrnehmen vermittelten Vorstellungen reichlich, sicher und miteinander leicht verknüpfbar als zu bearbeitender Denkstoff gewonnen sein, und sie müssen im Bewußtsein bereit vorliegen. Die Erzielung solch seelischen Zustandes erfordert demnach ein reichliches, geregeltes und durch genügend lange Zeit gepflegtes Wahrnehmen oder, wie man unter Bevorzugung des Wahrnehmens mittels des Gesichtssinnes sich sprachlich ausdrückt, sie erfordert in allererster Reihe Anschauung, diese gepflegt in der Absicht, eben jene wie angegeben gearteten Vorstellungen beizuschaffen. Bevor also an eine strenge Entwickelung der geometrischen Lehren zu denken ist, muß genügender Vorstellungsvorrat beschafft und es muß dieser Stoffvorrat genügend durchgearbeitet sein. Raumvorstellungen werden aber nur gewonnen auf dem Wege sinnlicher Wahrnehmung; der Unterricht muß also an die lebhafte sinnliche Anschauung anknüpfen, muß sich ihrer zielbewußt bedienen. Auf diesem Wege muß eine größere Menge von Anschauungsstoff beschafft, muß eine reichliche Menge von Bausteinen gewonnen und bereitgestellt werden, die im nachfolgenden Unterricht geistig behauen und begrifflich verarbeitet werden, um so das wissenschaftliche Gebäude der Geometrie vor den Augen des Schülers und mit seiner Hilfe aufzuführen. Demnach

ist Stoffsammlung die erste und nächstliegende Aufgabe — ganz so wie der Beginn eines vernünftig betriebenen erdkundlichen Unterrichtes vor allem durch Beobachtungen im Freien, durch Ausflüge, durch die vielen sich dabei aufdrängenden und gemeinsam geordneten und durch Vergleichung geklärten Einzelwahrnehmungen den Grund legt zu einer ganzen Reihe von Einzelkenntnissen, die nicht aus Büchern erlernt werden können und die aus solchen nicht erlernt, nicht eingetrichtert werden sollten. Und ganz so wie ein richtiger grundlegender naturkundlicher Unterricht vor allem besorgt sein muß, sehbare, fühlbare, meßbare, zerlegbare Naturdinge vor den Schüler zu bringen, damit er sie erfasse und vergleiche und durch solche Einzelbeobachtungen sich allmählich den Grundstock [1]) naturkundlichen Verstehens und Wissens verschaffe.

In entsprechender Weise bedarf also der mathematische, insbesondere der geometrische Unterricht schon in Hinsicht auf die durch ihn zu bewirkende logische Schulung eine geregelte Anschauungspflege — d. h. jener Unterricht der Mittel- und Oberklassen unserer höheren Schulen setzt als eine notwendige Vorstufe seiner selbst einen entsprechenden Anschauungsunterricht voraus. Wird ein solcher unterlassen, so stellen sich dem späteren Unterricht naturnotwendigerweise erhebliche Schwierigkeiten in den Weg. F. Klein spricht sich hierüber deutlich und eindringlich genug aus wie folgt[2]) (1902):

„Kein Unterricht an den Gymnasien und an der Realschule ist so schwierig wie der mathematische, insofern die große Mehrzahl der Schüler zunächst durchaus abgeneigt ist, sich in das starre Gerüst des logischen Schlusses einspannen zu lassen. Das Interesse der jungen Leute wird aber viel leichter gewonnen, wenn man von sinnenfälligen Dingen ausgeht und erst allmählich zu abstrakten Formulierungen überleitet. Daher ist es psychologisch durchaus richtig, den solcherweise bezeichneten Weg zu gehen. Nicht minder empfiehlt sich derselbe, wenn wir nach dem eigentlichen Zielpunkte des mathematischen Unterrichts fragen. Man hat als solchen früher zu ausschließlich diesen hingestellt: den Verstand zu schärfen. Eine

1) Zu solchem Grundstock naturkundlichen auf Anschauung gegründeten und schon in den untersten Klassen unserer höheren Schulen (wie in den Klassen der Volksschule) zu vermittelnden Wissens gehört auch eine Gruppe physikalischer Grundversuche, auf deren Anstellung, Besprechung und Verwertung nicht erst gewartet werden kann, bis im Lehrplan ein besonderer „physikalischer Unterricht“ erscheint. Auf solche Grunderfahrung stützt sich dann beim Erlernen und Einüben der Raummaße (s. unten) seinerseits der geometrische Unterricht, um den Begriff des spezifischen (oder Art-) Gewichtes zu benutzen. Noch besser dürfte es sein, diesen Begriff durch ein paar grundlegende Versuche erneut zu vermitteln.

2) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 11 (1902), S. 129 f.

Hauptsache ist doch auch, die Überzeugung entstehen zu lassen, daß richtiges Nachdenken auf Grund richtiger Prämissen die Außenwelt beherrschen läßt. Dann aber muß von Beginn an der Blick auf die Außenwelt mit gerichtet werden."

Und Klein tritt, um auch dies mit zu erwähnen (ebenda S. 130) sofort auch der unnötigen Befürchtung oder der Übertreibung entgegen, daß „vor lauter Vorführungen interessanter Anwendungen die eigentliche logische Durchbildung verkümmern" könnte oder müßte.

Im gleichen Sinne wie Klein äußern sich auch andere bekannte Methodiker. So sagt Borel („Elemente der Mathematik", übersetzt von Stäckel, S. IV): „... Dabei mache ich jedoch einen wesentlichen Vorbehalt. Die jungen Leute sollen das euklidische System erst dann kennen lernen, wenn sie reifer geworden sind und sich mit den Tatsachen der Geometrie bereits so weit vertraut gemacht haben, daß sie von der Trockenheit der euklidischen Methode nicht abgestoßen werden."

Und P. Appell läßt sich folgendermaßen vernehmen (Journal des savants, 1903, p. 364): „Actuellement le côté purement logique, le côté de la rigueur et de la déduction sont beaucoup trop développés; les définitions semblent tomber du ciel. Il faudrait, au contraire, montrer aux commençants des objets géométriques en papier, en bois, en fil de fer; leur faire dessiner avec soin les figures qu'ils étudient et leur faire vérifier les théorèmes par des mesures prises sur les dessins; leur faire comprendre que l'idée de similitude s'impose dès qu'on veut faire un agrandissement ou une réduction d'un dessin, et que la théorie géométrique de la similitude n'est que l'analyse rigoureuse d'une idée courante ..."

31. c) Die logische Schulung der Zöglinge war lange nicht nur als Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichtes angesehen worden, sondern fast als das einzige Ziel, welchem dieser zuzustreben habe. Erst die neuere Zeit ist — man muß wohl sagen — wieder zu der Auffassung gekommen, daß mathematischer Unterricht nicht bloß Mittel zum Zweck logischer Schulung sei, sondern daß ihm — und insbesondere dem geometrischen Unterricht — auch gewisse Selbstzwecke zukommen, wegen deren er betrieben werden muß. Einer dieser weiteren Zwecke und wohl der vornehmste, weil für die allgemeine Bildung und für die praktische Verwendung gleich wichtig, ist die Ausbildung und Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens der ins Leben hineinwachsenden jungen Menschen, um so, wie die Meraner Vorschläge es ausdrücken (S. 57), „die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwickelung zu bringen".

Goethe nennt einmal die Phantasie „eine Vorschule des Denkens", und wie alle Vermögen des Geistes ist sie bis zu einer gewissen

Stufe entwickelungsfähig, und sie sollte auch entwickelt werden. Im besonderen „die räumliche Phantasie — sagen wir mit Herbart — ist einer künstlichen Leitung äußerst bedürftig; sie bildet sich sehr selten von selbst genügsam aus; sie ist demjenigen unentbehrlich, der mit dem Auge etwas beurteilen, mit der Hand etwas geistig vorbilden soll". Somit sollte diese Pflege auch nicht nur „nebenbei" stattfinden; vielmehr ist die bewußte Ausbildung der Phantasie für die harmonische Ausbildung des Menschen ebenso wichtig wie die bewußt gründliche Ausbildung des Verstandes.

Und zwar obliegt doch einem gewissenhaften Unterrichtsverfahren sicherlich als nötig die Aufgabe, sowohl die anschauliche als die kombinierende Phantasie zu pflegen, d. h.[1]) die gewonnenen Vorstellungen müssen sowohl zu lebendiger Anschaulichkeit gebracht werden als auch müssen diese Vorstellungen in lebhafte Verknüpfung und Wechselbeziehung eintreten können. Dies aber soll und kann geschehen bei der Zerlegung der Raumformen und bei deren Wiederzusammenfügung zu den alten und zu neuen Gestalten, bei der Betrachtung ihrer gegenseitigen Lage und deren Änderung (verschiedene Möglichkeit der Bewegung und der Erzeugung neuer Formen), bei der Durchdringung geometrischer Gebilde (Achsen-Schnittflächen u. dgl.), beim Schätzen und Berechnen räumlicher Größen, bei der gebotenen Abänderung des Maßstabes, auch bei der Erwägung über Zweckmäßigkeit und Schönheit einzelner losgelöster oder verbundener Formen, stets auch bei der Überlegung über passendes und schönes Ausnützen der Papierfläche zum Zeichnen und Modellieren.

Der vorhin genannte wichtige dem geometrischen Unterricht innewohnende oder zuzuschreibende Zweck oder das weitere wichtige Ziel, um deswillen Geometrie betrieben werden muß, ist ohne Zweifel bislang verhältnismäßig wenig zu Beachtung und zur Geltung gekommen, und doch ist die Ausbildung des Raumsinnes und der geometrischen Phantasie eine nicht bloß von Technikern und Kunstlehrern zwar mit Recht gestellte, leider meist nicht genügend erfüllte Forderung, sondern auch der Pädagog und der Mathematiklehrer müssen in gleicher Weise den Anspruch auf jene Ausbildung erheben.

Als Wortführer jener ersten Gruppe sei hier nur der bekannte Ingenieurprofessor A. Riedler von der Technischen Hochschule zu Charlottenburg angeführt; er hat sich hierüber 1895 „Zur Frage der Ingenieurerziehung" geäußert.[2]) Er wünscht nicht bloß die Ausbildung der Ingenieure auf der Hochschule anders, besser, praktischer — und tatsächlich hat sein Wunsch seitdem reichlich Erfüllung erfahren —, sondern er findet zur Erreichung jenes Zieles schon eine

1) Vgl. Wundt, Grundriß der Psychologie, S. 314.

2) Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Jahrgang 1895 (Band 39), S. 951—959.

etwas andere Vorbildung und Ausbildung auf den höheren Schulen für nötig — aber in dieser Hinsicht ist Riedlers Wunsch noch kaum in Erfüllung gegangen. Und gerade in bezug auf die Leistung des geometrischen Unterrichtes dieser Schulen sagt er (S. 955):

„Ein entwickeltes Vorstellungsvermögen ist die Grundlage jeder schaffenden Tätigkeit ... Ohne bildendes, gestaltendes und wiedergebendes Vorstellungsvermögen ist keine schaffende Ingenieurtätigkeit möglich. Die Ausbildung dieses Vermögens ist die wichtigste Grundlage der Ingenieurerziehung; das wichtigste Hilfsmittel hierzu ist der geometrische Unterricht. Für das Vorstellungsvermögen ist die antike Geometrie mit ihren unendlichen Weitläufigkeiten und sog. Beweisen und unwissenschaftlichen Einzeldarstellungen belanglos. ... Für die Ingenieurerziehung taugt nur die Ausbildung der Anschauung und Vorstellung, die Ausbildung der Raumvorstellung, des plastischen Denkens; das wird durch den herrschenden Schulunterricht dem Namen, nicht der Sache nach gepflegt. Damit bleibt eine wichtige Geistestätigkeit ganz unentwickelt. ... Der herrschende Unterricht in der Geometrie, Stereometrie usw. als Anhängsel der Mathematik ist ungefähr das Gegenteil dessen, was für Ausbildung der Raumvorstellung geleistet werden soll; er ist eine Linienkombination. ...“

Dem Praktiker Riedler schließt sich in bezug auf Wertschätzung einer schulmäßigen richtigen Ausbildung der Raumanschauung der Theoretiker F. Klein voll an.[1]) Er hebt insbesondere die Wichtigkeit eines geometrischen Vorbereitungsunterrichtes hervor und nennt sie geradezu „einleuchtend“; derselbe habe „die Schüler vorweg im räumlichen und ebenen Anschauen sowie im Zeichnen von Figuren und im Messen zu üben“. Schon hiermit scheint mir aber Klein das Wesen eines solchen Unterrichtes etwas zu eng zu fassen, besonders auch, wenn er ihm die Aufgabe zuschreibt, „daß man vor allem erst die Figuren benennen und in der Anschauung erfassen lernen muß, ehe man sich gewisse Sätze über sie einprägen soll“. Und wenn Klein dem beifügt, daß hierzu „in erster Linie das wirkliche Konstruieren der Figuren, also das Zeichnen“ und „als nicht minder wichtig auch das Messen“ zu betreiben sei, damit „der Schüler nicht nur lerne, mit dem Lineal und dem Zirkel zu operieren, sondern ebenso gut auch die Fertigkeit erlange, mit Längen- und Winkelmaßen umzugehen“, so ist auch hiermit m. E. Umfang und Inhalt und Bedeutung des zu Erstrebenden nicht weit genug gefaßt.

In besserer Weise hat die Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte die Forderung aufgestellt[2]), daß der mathematische Unterricht der höheren Schulen ganz im allgemeinen mehr als bisher üblich für „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ sorgen solle (s. oben S. 58); in der Einzelausgestaltung scheint mir aber auch diese Kommission ihrer angeführten Grund-

1) Klein-Schimmack (Nr. 125), S. 30.

2) Gutzmers Gesamtbericht (s. oben S. 58), S. 106 u. 108.

forderung nicht voll gerecht zu werden, wenn sie als geometrische Aufgabe der Quinta die oben S. 58 mitgeteilte Vorschrift aufstellt. Inwiefern dies nicht dem Wünschenswerten entspricht, wird weiterhin (S. 100f.) zur Darstellung kommen, kann übrigens auch gleich aus dem hier Nachfolgenden erkannt werden.

32. d) Zu den bis jetzt schon genannten Teilaufgaben, die nach meiner Auffassung der geometrischen Anschauungslehre zuzuweisen sind, kommt nämlich als eine weitere wichtige die folgende hinzu: das Abschätzen und Messen sowie der Zwang zum Vorstellen von Maßgrößen verschiedener Art, dazu das Nachbilden des Gesehenen durch die Schüler und zwar das Nachbilden sowohl durch Zeichnung als auch durch Modellieren. Schon der Rechenunterricht sowie überhaupt der sog. Realunterricht, also der naturkundliche und der erdkundliche, müssen ihrerseits mithelfen, das Schätzen und Messen zu benützen und richtig zu pflegen; noch mehr und im engeren Sinn als Aufgabe fällt dies dem geometrischen Unterricht der Unterklassen zu. Strecken, Winkel und Flächenstücke sind in reichlicher Übung abzuschätzen und zu messen (die Winkel im Freien mit Benützung eines Theodolitmodelles). Auch F. Klein spricht sich in diesem Sinn aus[1]; „Schon auf der Schule müßte die Fähigkeit, Maßgrößen zu schätzen, geübt werden, was sich hernach auf den mannigfachsten Gebieten menschlicher Tätigkeit als nützlich erweisen wird. Gerade die geometrische Propädeutik ist nach meiner Überzeugung die geeignete Stelle, um dafür die Grundlagen zu gewinnen." Was aber das Zeichnen und besonders das Modellieren ebener und räumlicher Figuren betrifft, so ist nur dann, wenn die vom Schüler gewonnenen Anschauungen bildlich dargestellt und nachgeformt wiedergegeben und vor Augen gestellt werden können und tatsächlich dargestellt werden, annähernde Sicherheit dafür vorhanden, daß die Auffassung des Schülers richtig und vollständig und daß sie sein fest gegründetes Eigentum, sein wahrer geistiger Besitz geworden ist. Dazu kommt, daß unter und nach solcher Selbstbetätigung des Schülers dessen Freude an den Formen und ihren Beziehungen ein viel lebhafteres Verhältnis innerer Anteilnahme seines geistigen Wesens herzustellen und allmählich zu vertiefen geeignet ist.

Zugleich wird hiermit der andere große Vorteil erreicht, daß schon in den ersten Anfängen mit dem geringsten Zuwachs an Wissen zugleich auch die Fähigkeit geweckt und gepflegt wird, das erworbene Wissen anzuwenden. Solchem Zweck kann aber das vielfach übliche Verfahren nicht dienen, wenn bei diesem bloß die einzelnen Lehrsätze und ihre Beweise durchgesprochen und durch

1) Klein u. Schimmack (Nr. 125) S. 33.

häufige Wiederholung eingeprägt werden; denn hierdurch wird nur der Hang mancher Schüler, lediglich mit dem Gedächtnis zu arbeiten, in bedenklicher Weise unterstützt. Nicht das Wissen allein macht die geistige Bildung aus, sondern zu dieser gehört die Fähigkeit und Gewandtheit, das erworbene Wissen passend zu verwerten. Werden diese beiden Zweige gepflegt und geübt — und dies eben geschieht reichlich in dem hier vorgeschlagenen ausführlichen Anschauungsunterricht —, so bildet sich zugleich auch beim Schüler das nötige Selbstvertrauen und das Bewußtsein einer gewissen nach und nach wachsenden Selbständigkeit.

33. e) Ein weiteres kommt unserem Unterricht als Aufgabe zu und ergibt sich, wenn dieser richtig behandelt wird, als dessen Frucht, das ist die sprachliche Übung. Mit Recht werden behufs Ausbildung der Schuljugend im Sprachlichen Anschauungsübungen der verschiedensten Art vorgenommen, und auch der hier geplante und geforderte geometrische Anschauungsunterricht kann und muß, auch auf der höheren Schule, demselben Zwecke nutzbar gemacht werden. Ganz so wie der erd- und der naturkundliche Unterricht nicht nur die Möglichkeit und die Pflicht hat, durch sprachliche Wiedergabe der angestellten Beobachtungen und der gewonnenen inneren Anschauungen die Probe zu machen auf Richtigkeit und Vollständigkeit der sinnlichen Wahrnehmung, um etwaige Lücken der Vorstellungsbilder alsbald auszufüllen, sondern auch das Sprachvermögen selbst zu üben, ebenso fällt auch dem geometrischen Anschauungsunterricht gleiche Pflicht und gleicher Gewinn zu. Und der Vorteil für die Pflege des Sprachlichen tritt auf dieser Stufe um so deutlicher hervor, als es sich hier nicht um Beweise, um Schlüsse und Schlußreihen handelt, die wiederzugeben wären, sondern um Wiedergabe von unmittelbaren Beobachtungen und anschließenden einfachsten Überlegungen, bei der also nicht schon mit der Anforderung an sprachliche Gestaltung auch der Zwang streng logischer Geistesarbeit sich verknüpft. Es handelt sich nicht um begriffliche Arbeit, um Aufstellung von Sach- und Worterklärungen, sondern zunächst um klare, einfache Darstellung des Geschauten, um so in kurzer Erzählung ebenfalls Rechenschaft zu geben über Richtigkeit und Vollständigkeit der Auffassung.

34. f) Neben und mit der Sprachfertigkeit ist auch die beim geometrischen Anschauungsunterricht zu erreichende größere Handfertigkeit ein aufzustellendes Ziel, und sie ergibt sich bei richtigem Betrieb als unmittelbarer und unverlierbarer Gewinn, nämlich die Fähigkeit und zunehmende Gewandtheit des Schülers, die üblichen Zeichen- und Modellierinstrumente zu gebrauchen und in

praktischer Weise auszunützen. Und diese zu gewinnende Fertigkeit im Gebrauch von Papierstreifen, Lineal, Maßstab, Winkelscheit, Zirkel und Schere sowie im Falten und Kleben des Papiers soll nicht bloß ein angenehmes Nebenergebnis des Betriebes sein, sondern der Unterricht hat es darauf abzuheben, eben diese Ausbildung der Handfertigkeit und zugleich des Augenmaßes als Selbstzweck zu erreichen und möglichst hoch zu steigern.

Im Zusammenhang hiermit und da höhere Interessen in Betracht kommen, darf hier wohl auch ein auf unseren augenblicklichen Gegenstand bezügliches Wort aus dem berufenen Munde des Hochschullehrers F. Klein eine Stelle finden (Klein-Schimmack S. 32):

„In unserer Betonung auch der praktischen Fertigkeiten stellen wir uns hier in prinzipiellen Gegensatz zu einer weit verbreiteten Ansicht, die zumal an der Universität mehr als einen Vertreter findet. Es wird da gesagt, nur das Begreifen der Dinge sei das Notwendige, die „äußerlichen" Fertigkeiten brauche man nicht zu üben; denn wenn man nur die Idee begriffen habe, so könne man sich jederzeit, „wenn man es einmal brauchen sollte", ja einarbeiten. Nun, und wie es dann geht, — das sehen Sie z. B. an den Leuten, die nie ordentlich zeichnen gelernt haben und die es darum geflissentlich vermeiden, eine mathematische Entwickelung durch eine Figur zu begleiten. Ich weise nur auf die bekannte physiologische Tatsache hin, daß allein diejenigen Teile des menschlichen Organismus funktionsfähig sind, die rechtzeitig und hinreichend geübt werden. Unser Schul- und Universitätsunterricht sieht manchmal in der Tat so aus, als käme es nur auf die Ausbildung einzelner kortikaler Partien des Gehirnes an, und man dürfe alle übrigen Teile des Nervensystems als untergeordnet vernachlässigen. Nein, eine allseitige Ausbildung des nervösen Apparates muß angestrebt werden, und darum soll man gerade auch die äußeren Fertigkeiten nicht verachten. Das Zeichnen und Messen erfordert zu geeigneter Zeit eine ebensolche Sorgfalt bei der Einübung, als die Gewöhnung an diese oder jene neue Idee des Lehrgebäudes."

Diese eine Stimme möge genügen, um die Bedeutsamkeit meiner Forderung noch zu erhärten.

35. g) Zu den angeführten Gründen allgemein pädagogischer und unterrichtstechnischer Natur, welche die allgemeine Ein- und Durchführung eines geometrischen Anschauungsunterrichtes als Unterstufe des gesamtgeometrischen Unterrichtes als notwendig erweisen, gesellt sich noch ein weiterer, die Rücksicht auf das praktisch-tätige Leben, das Zwingende einer Verwendbarkeit geometrischen Wissens und Könnens in der Betätigung außerhalb der Schule und nach Abschluß der Schulzeit. Nach dem Verlassen der oberen und

obersten Klassen unserer höheren Schulen mögen die Lehrsätze und deren Beweise sowie die rechnenden Teile des mathematischen Schulwissens undeutlich und unsicher geworden, ja bald ganz verflogen sein — die einmal gewonnene Grundlage und Gewandtheit im Vorstellen räumlicher Beziehungen bleibt und ist fast unverlierbar und kann als dauernder geistiger Besitz unmittelbar in jeder Lage des Lebens verwendet werden; für manche berufliche Tätigkeit ist sie sogar eine unbedingte Notwendigkeit. Wird aber solche Übung in der Raumlehre nicht erst bei und mit den Primanern vorgenommen, sondern jahrelang und zumal im aufnahmefähigsten jugendlichen Alter gepflegt, so ist der Gewinn und der geistige Besitz um so größer und für zeitlebens wie verbürgt. Die bekannt große Zahl von Schülern aber, die nur bis zu den mittleren Klassen unserer höheren Schulen vordringen und von da ab in irgendwelchen Lebensberuf eintreten, sie nehmen, wie heute die Lehrpläne meist gestaltet sind, in genannter Hinsicht wenig Ausbeute mit ins Leben; welch reichlichen Gewinn aber könnten sie von einer länger gepflegten geometrischen Anschauungslehre mit steten eingeflochtenen Übungen haben, und welche zwar beschränkte, aber gegen jetzt bessere Ausbildung müßten sie haben, da ihnen ein entsprechender Unterricht und ein hierdurch erlangtes Wissen und mehr noch Können die Stelle und den Erfolg weiterer mathematischer Ausbildung ersetzen und sie zu manchen Dingen praktischer Betätigung befähigen müßte!

In diesem Zusammenhang darf wohl ein Klageruf von Oberlehrer Junge[1]) hier mit aufgenommen werden (S. 213 f.): „Nicht für die Schule, sondern fürs Leben lernen wir. Das Charakteristikum der Schularithmetik ist die Neigung zum Formelhaften und Abstrakten, im Gegensatz zum Anschaulichen und Praktischen. Dieselbe Neigung herrscht in der Geometrie, und sie läßt sich hier bis auf Plato und Euklid zurückverfolgen.

Plato warf der Geometrie seiner Zeit vor, sie sei sich über ihre Voraussetzungen nicht klar. Definitionen wollte er haben und einen streng systematischen Aufbau, dem keine dialektische Kunst etwas anhaben könnte. Euklid hat diese Forderungen erfüllt. Ist aber der dialektische und oft genug rein schematische Aufbau seiner Elemente auch der psychologische? Taugt er auch für Lernende? Zwei Jahrtausende hindurch hat niemand daran gezweifelt.

Die Elemente Euklids und ihnen folgend der elementare Geometrieunterricht fangen mit Definitionen an. Sie mühen sich ab, den Punkt, die Linie, den Winkel und alle möglichen Dinge zu definieren. Solche Definitionen mögen ja für den Philosophen ganz interessant

---

1) Junge (Berlin), Die unpraktische Schulmathematik. Pädagog. Archiv, 49. Jahrg. (1907), S. 206—221.

sein. Für das Kind, für den Quartaner sind sie nichts als eine trügerische Worterkenntnis.

Aber ist nicht seit einigen Jahrzehnten der systematischen Geometrie die geometrische Propädeutik vorangestellt? — Nein, nicht vorangestellt, sondern daneben gestellt! Weder die Definitionen haben aufgehört den Quartaner zu beunruhigen, noch was im Euklid darauf folgt, die Kongruenzsätze, die Sätze von der Gleichheit der Scheitelwinkel, Gegenwinkel und wie die Winkel alle heißen mögen, die Umkehrungen nicht zu vergessen. Und außerdem, was ist ein Jahr unter so vielen? Ein Jahr Propädeutik und sechs Jahre reines System!"[1])

Hierzu sei noch ein ernstes Wort von Holzmüller angeführt (H. Z. 24 [1893], S. 138): „Jedenfalls macht Nichtkenntnis der einfachsten stereometrischen Berechnungsarten einen jungen Mann dieser Art minderwertig für viele Lebenslagen. Inhalts- und Gewichtsberechnungen treten dem Kaufmann, dem Maschinen- und Hüttentechniker, dem künftigen Reserveoffizier, dem Subalternbeamten des Berg- und Forstfachs wie dem des Eisenbahnwesens so häufig entgegen, daß man ihre Kenntnis einfach als unentbehrlich bezeichnen muß."

36. Nach vorstehender ausführlicher, wie ich glaube, Begründung der Nützlichkeit und Notwendigkeit eines ausgedehnteren Unterrichtes in geometrischer Anschauungslehre für die Unterklassen unserer höheren Schulen muß doch wohl gerechterweise auch den Gegnern einer solchen Forderung das Wort zur Einsprache gegönnt werden.

a) Gegen Euklid und seine Verwendung im Schulunterricht waren schon früh in wissenschaftlicher Beziehung und noch mehr in Hinsicht auf die Bedürfnisse der Schule Einwände erhoben worden; gleichwohl behielt er für den Betrieb der „wissenschaftlichen" Geometrie stets seine gewaltig bevorzugte Stellung bei. Daneben erzwangen dann die Bedürfnisse des praktischen Lebens im 18. Jahrhundert und dessen ganze Geistesrichtung die Abfassung und den Gebrauch von Lehrbüchern, die mehr auf Abrichtung und auf äußerliches Wissen der Lernenden abzielten als auf deren geistige Weckung. Gegen solche Lehrweise wiederum traten diejenigen auf, denen es auf einen wahrhaft wissenschaftlichen Geist des Unterrichtes ankam und die jedes Nachgeben gegen die „Verwässerung" hoher Wissenschaft strengstens zurückwiesen. In diesem Sinn und vermutlich zugleich auch gegen das Vordringen Pestalozzischer „Verflachung" auftretend wirkten am Anfang des 19. Jahrhunderts F. Schweins[2]) und M. Ohm,

1) Vgl. oben S. 1f. und S. 73f.

2) Hier darf freilich nicht verschwiegen werden, daß Schweins insofern mittelbar auch günstig für die elementarste Geometrie gewirkt hat, als er (von 1805 ab) wie er selbst sagt, „die Dünste der bizarren Einteilung in die niedere

und der gleichen Richtung huldigte auch M. W. Drobisch, der in seiner warmen Verteidigungsschrift für die Gymnasialmathematik [1]) die Erklärung abgab (S. 86): „Populär darf auf der Gelehrtenschule gar nichts gelehrt werden! Was man lehrt, dazu muß eine streng wissenschaftliche Basis vorhanden sein, und diese muß stets benutzt werden.“ Erneut kamen die Mahnungen zum Einhalten eines strengeren Verfahrens, als in Nachwirkung der Pestalozzischen Anregungen, wie wir oben (S. 40) sahen, auf dem Gebiet der Formenlehre große Übertreibungen und Einseitigkeiten hervortraten, da einzelne jener Lehre eine ungebührliche Ausdehnung gaben und bei der Unterweisung darin unzweckmäßige Wege verfolgten. Gegen solches Vorgehen trat dann (wie z. B. bei Gugler, 1850) der selbstverständliche Rückschlag ein, der sich da und dort sogar bis zur gänzlichen Verwerfung einer geometrischen Anschauungslehre gesteigert hat[2]). Doch bezeugt K. Gruber 1849 (Nr. 12, S. IX), daß „die Vorurteile, welche früher der Einführung dieses Unterrichtsgegenstandes entgegenstanden, großenteils einer besseren Überzeugung gewichen“ seien.

Daß dies so ist, zeigen deutlich genug die vielfachen, immer wiederholten Versuche der verschiedenen seitdem erlassenen Lehrpläne, einer vorbereitenden geometrischen Lehre doch etwas und irgendwie Eingang in den Unterricht zu eröffnen. Eine volle Ablehnung solchen Zulassens ist m. W. bis vor kurzem nicht mehr öffentlich zur Sprache gekommen; nur über die Ausdehnung und Einzelgestaltung solcher Lehre gehen die Meinungen auseinander.

Um so auffälliger ist eine neuere Stimme, die sich gegen jede anschauliche Einführung geometrischer Dinge wendet: E. Schultz spricht sich dagegen aus[3]), „daß die Schüler rein experimentell mit den ersten geometrischen Weisheiten bekannt gemacht werden“; er glaubt, daß „durch solche Methode die Schüler nicht zum selbständigen logischen Denken erzogen werden“, daß „die nach der rein experimentellen Methode eingeführten Schüler nicht im stande sein werden, die größeren streng geführten Beweise zu überschauen“. „Daß die Schüler schon in der Quarta mit der Ebenheit, mit der Symmetrieebene, Symmetrieachse und mit der axialen Symmetrie bekannt gemacht werden“, hält Schultz „für viel zu weitgehend, um nicht zu sagen

---

und höhere Geometrie zum Verschwinden brachte“ — mit dem wohl begreiflichen Seitenhieb, „daß, je mehr der Mathematiker von gemeiner Geometrie spricht, auch diese desto gemeiner von ihm behandelt wird“.

1) M. W. Drobisch, Philologie und Mathematik als Gegenstände des Gymnasialunterrichts betrachtet, mit besonderer Beziehung auf Sachsens Gelehrtenschulen. Leipzig, Cnobloch, 1832 (103 S. in 8⁰).

2) Vgl. Bericht von O. Fischer in Schmids Encyklopädie des ges. Erziehungs- und Unterrichtswesens, Bd. 2, S. 396.

3) Unterrichtsblätter für Math. u. Naturwissenschaften, hrsgg. von F. Pietzker, Jahrg. 11 (1905), S. 11—13.

für ein pädagogisches Verbrechen“ (!) Statt dessen verlangt er, daß „die Schüler von Anfang an in den mathematischen Unterrichtsstunden geübt werden, ihre Gedanken so zu formulieren, daß sie in mathematischer Form wiedergegeben werden können“; dies sei „eine Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichtes, sei es in der Quarta oder in der Prima. Haben die Schüler das zunächst an den einfachsten Beispielen gelernt, dann werden sie auch Gefallen finden an den strengen Beweisen der geometrischen Lehrsätze über die Winkel an Parallelen usw.“

Welches sind nun solche „einfachsten Beispiele“? und wie gestaltet sich bei Schultz deren Einführung? Der hierbei herrschende Gedankengang ist an sich so bezeichnend und für die vielleicht auch sonst noch bei manchen Verfechtern „wissenschaftlicher Strenge“ vorhandene Auffassung kennzeichnend, daß es sich wirklich verlohnt, den von Schultz selbst angegebenen Unterrichtsgang für Quarta hier als abschreckendes Beispiel wörtlich einzuschalten. Er lautet:

„Meine erste mathematische Lehrstunde beginne ich damit, daß die Schüler mir Größen nennen müssen. Mit großem Interesse werden alle Klassengegenstände genannt. Alsdann führe ich sie zu dem Begriff der Gleichheit. Daß dies stets durch Frage und Antwort geschieht, brauche ich wohl nicht besonders hervorzuheben. Jetzt erhält die eine Größe (Ofen) den Namen A, die andere Größe (Ofen) den Namen B, und da sie gleiches Aussehen haben, so sehen die Schüler die Gleichheit von A und B ein, was mathematisch geschrieben wird: $A = B$.

Hiermit haben wir das durch Beobachtung gefundene Resultat an den Körpern A und B mathematisch formuliert und ausgedrückt. Jetzt suche ich den Schülern rein experimentell klar zu machen, daß gleiche Größen durch einander ersetzt werden können, und sofort lernen sie dies in mathematischen Zeichen wiederzugeben. Hieran schließt sich das Klarmachen und das mathematische Formulieren der Grundsätze: Gleiches zu Gleichem addiert usw., und Gleiches von Gleichem subtrahiert usw. Mit diesen drei angeführten Grundsätzen komme ich in der Quarta völlig aus. Zuerst geschieht die Einübung an Größen, welche mit einem Buchstaben bezeichnet werden, daran schließen sich Größen, welche mit zwei Buchstaben benannt werden, d. h. ich komme zu Strecken. Hier bespreche ich nun Strecke, Strahl, Gerade. Jetzt müssen sich die Schüler mit der eigentümlichen Bezeichnungsweisen vertraut machen, daß $XY = YX$ ist. Nach hinreichender Übung der Grundsätze an diesen so bezeichneten Größen gehe ich zu Größen über, die mit drei Buchstaben bezeichnet werden. Ich komme also zu den Winkeln. Natürlich werden an dieser Stelle die verschiedenen Winkel, ihre Bezeichnungsweise, die Addition und Subtraktion derselben besprochen. Es werden jetzt die Grundsätze an diesen so bezeichneten Größen durchgeübt. Auf diese Weise wird der Gesichtskreis der Schüler langsam und stetig erweitert. Ich gebrauche ungefähr 16—20 Stunden, bis die Grundsätze und ihre Anwendung den Schülern in Fleisch und Blut übergegangen sind. Sehr viele Schüler schnattern die Sätze her, aber die Sätze selbständig anzuwenden, sind sie nicht imstande. ...

Bei der Durchnahme der geometrischen Lehrsätze hat der Quartaner so viele Schwierigkeiten zu überwinden, daß bei ungeschicktem Vorgehen der Schüler von vornherein die Lust verliert. Der Schüler sieht die Figur, aus ihr soll er Eigenschaften der Strecken und Winkel beobachten, sie in mathe-

matischer Weise ausdrücken, die Grundsätze soll er selbständig anwenden und schließlich soll er auch noch korrekt schließen. Die größte Schwierigkeit, die Anwendung der Grundsätze, ist schon überwunden, jetzt kommt es darauf an, das Auge des Schülers zu üben und ihn daran zu gewöhnen, an der Figur die entsprechenden Strecken und Winkel zu vergleichen und so zu dem betreffenden geometrischen Lehrsatz zu kommen . . . Haben die Schüler (der Quarta) durch die Fragen des Lehrers die zu beweisende Eigenschaft erkannt, dann geht es an den streng logischen Beweis . . . In der nächsten Stunde müssen die Schüler den Beweis an der Tafel wiederholen. Von Anfang an müssen die Schüler daran gewöhnt werden, selbständig die Voraussetzung, die Behauptung zu finden und das aus der Figur abgeleitete Resultat in einem Lehrsatze wiederzugeben. So fahre ich fort und am Ende des Jahres habe ich außer den Dreieckssätzen die Sätze vom Parallelogramm durchgenommen und das ganze Pensum repetiert.“ Usw.

Was soll man zu solchem „vermeintlich logischem“ Formalismus sagen?! Größen nennen, gar nicht gleich aussehende und jedenfalls nicht vor Augen befindliche Öfen als gleich auffassen lassen, Kunstwörter und äußerliche Zeichen vorsagen, nachsagen und schreiben lassen, gleiche Größen einander ersetzen (!) lassen, die Grundsätze an Nichtsen von Inhalt einüben, abstrakte Dinge voranstellen vor jedes Auffassen, gar Selbstfinden von Gestalten und deren Beziehungen, Form und Formel bevorzugen vor dem Gehalt, Wesen von Strecke und Winkel in deren [ohnehin gar nicht nötige] Bezeichnung durch zwei oder drei Buchstaben verlegen, die schon im allerersten Naturgeschichtsunterricht sich aufdrängende Betrachtung von Symmetrie und Verwandtem rundweg ablehnen, die mathematische Formulierung als Hauptaufgabe der Quarta, ja die Hauptaufgabe als dieselbe für Quarta wie für Prima hinstellen — in der Tat, was soll man dazu sagen? Nichts anderes, als den scharfen Schlußentscheid, den Höfler abgibt und den man bei diesem selbst (S. 470) im Wortlaut lesen mag.

b) Einwände anderer Art sind zwar nicht gegen solchen Anschauungsunterricht überhaupt, wohl aber gegen dessen Beginn mit Betrachtung von Körpermodellen erhoben worden.

Die vorgebrachte Meinung, daß die Flächenanschauung im Menschen ursprünglicher sei als die vom Raum, kann hier wohl außer Betracht bleiben.

Aber die Einwände von Heinze (Nr. 76) und anderen dürfen wohl erwähnt werden. „Die Körpermodelle müssen vieles enthalten, was die Aufmerksamkeit der Schüler von dem Wesentlichen, von der Auffassung der Gestalt ablenkt.“ Wenn aber die benützten Modelle nicht vielfarbig sind und wenn der Lehrer lebendig genug verfährt, um seine Schüler bei dem, was er behandeln will, festzuhalten, kann von Zerstreuung keine Rede sein. — „Je nach dem Standpunkt des beobachtenden Schülers gestaltet sich der Anblick des Körpers verschieden, und es entstehen unvermeidbare Sinnestäuschungen.“ Dies könnte doch nur gelten, wenn das Körpermodell unbewegt vor

der Klasse aufgestellt bliebe; aber das Modell geht ja von Auge zu Auge, von Hand zu Hand! — Und dann: „Man suche doch aufzudecken, was für das Verfahren bei der Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks aus dem Betrachten eines Oberflächenteiles des Tetraeders gewonnen wird; man wird wohl nichts finden, was das gleichseitige Dreieck als solches anginge, das Tetraeder kann dabei höchstens zerstreuend wirken.“ Aber es soll ja auch nichts gewonnen werden, jene Art von Dreieck soll nur am Tetraeder „gleichsam als Naturobjekt“ vorkommend vorgewiesen sein, bevor man zum Nachbilden durch Zeichnen und Ausschneiden übergeht.

Auch Schulze (Nr. 86) verwirft den Beginn mit dem Würfel, weil dieser „sich als eine Vielheit von Merkmalen und Eigenschaften dem Beschauer darbiete“, und er meint, „daß der Quintaner erst dann für den Würfel oder das Tetraeder eine verständnisvolle Auffassung gewinnen kann, wenn er zuvor das Quadrat oder das gleichseitige Dreieck kennen gelernt hat und damit genügend vertraut geworden ist“. Sollte denn nicht doch das Körperliche und Befühlbare „verständnisvoller Auffassung“ näherstehen? — Übrigens erklärt derselbe Methodiker Schulze (Nr. 107, S. 613): „Zur Gewinnung der Grundbegriffe muß man natürlich von den Körpern ausgehen, genauer von einem vorgezeigten physischen Körper als dem Modelle eines mathematischen. Man wird sich Beispiele verschiedenartiger Körper nennen lassen . . ., (aber) sich sonderlich länger bei der Betrachtung der Körper aufzuhalten, ist wohl nicht angebracht. Die Zeit wird besser ausgenützt, wenn man den Schüler sobald als möglich Lineal, Zirkel und rechten Winkel zur Lösung geometrischer Aufgaben handhaben läßt.“ Als ob nicht die Vereinigung von beidem das beste wäre!

Wenn ferner Norrenberg (Nr. 108) sich gegen einen falschen Anschauungsunterricht wendet, der „den Hauptwert auf die Beweise und nicht auf das Konstruieren legt“, der „stereometrische Lehrsätze ableitet, die, ohne jemals im Laufe der nächsten Jahre Anwendung zu finden, nur totes Wissen bleiben“, und wenn er sich damit gegen eine „Pseudomethode“ wendet und wenn er mit dem „toten Formalismus auswendig gelernter Lehrbuchbeweise gebrochen“ wünscht, so hat er Recht. Aber man kann ihm nicht zustimmen, wenn er sich gegen jeglichen besonderen geometrischen Anschauungsunterricht ausspricht, von dem er meint, daß „dessen Name schon auf den methodischen Fehler hinweist, da doch alle Geometrie anschaulich erkannt werden muß“. Nein, die Geometrie muß begrifflich erkannt werden, und um eben dies mit jüngeren Menschen fertig zu bringen, bedarf es eben des vorangehenden „anschaulichen“ Betriebes, der sich den spöttisch gemeinten, aber ganz richtig gewählten Namen eines „Vorspannes“ für den nachfolgenden Unterricht gerne gefallen läßt, weil

bekanntlich das Fehlen des Vorspannes lange genug den Karren stecken bleiben ließ und ihn oft genug noch stecken läßt.

Der vorhin (S. 90f.) behandelte Oberlehrer Schultz hat seine Auffassung über unseren Gegenstand als Widerspruch veröffentlicht gegen die von Max Simon (Straßburg) wiederholt vertretene Meinung hierüber. Dieser Meinung muß hier eine etwas eingehendere Betrachtung zuteil werden, sowohl wegen der Bedeutung ihres Vertreters in der heutigen mathematischen Unterrichtslehre, als auch weil in der Besprechung seiner Ansicht im zustimmenden wie im ablehnenden Sinn meine eigene Auffassung deutlich hervortreten mag.

Simon hat Anschauung und anschaulich geometrischen Unterricht 1895 behandelt in einem bedeutsamen Werk (Nr. 95), dessen zweite Auflage 1908 erschien, und er hat der Sache einen besonderen Aufsatz gewidmet in Form eines Briefes an F. Klein, der aus dem Jahre 1904 stammt (Nr. 115) und hat sich nochmals 1907 (Nr. 128) darüber ausgesprochen. Nach Simon (Nr. 95, S. 45) „muß man den geometrischen Unterricht, insbesondere auf den Anfangsstufen, so sinnlich wie möglich geben, und das Auge ist das wichtigste Hilfsinstrument des Geometers“; auch der Pflege der mathematischen Phantasie redet er das Wort (Didaktik, S. 40): „auch hier muß natürlich eine planmäßige Schulung eintreten“. Die Verwertung der Anschauung wünscht auch Simon (D., S. 117); wenn er aber meint, „mit der Berufung auf die äußere Anschauung müsse man durchaus vorsichtig sein“, da „sich hinter dem, was man gewöhnlich Anschauung nennt, fast stets mehr oder minder versteckte Hypothesen über den Raum bergen“, und daß „die äußere Anschauung dringend der Kontrolle der inneren, der logischen bedarf“, so meine ich dagegen, daß man auch zu viel Vorsicht predigen kann, und daß einem Quintaner ein wirkliches Quadrat auch insoweit als Quadrat „erscheint“, als es ihm zur inneren Anschauung eines solchen verhilft und er diese Figur genau zeichnen lernt.

Simon erklärt (Nr. 95, S. 45) „das Zeichnen der Sexta und Quinta als die eigentliche, wahre Propädeutik für die Geometrie“. „Wirkliche wissenschaftliche Geometrie zu treiben ist der Quintaner noch nicht geeignet, und unwissenschaftliche ist vom Übel; aber Hand und Auge üben kann er, und diese Übung arbeitet der Geometrie vor, und es ist m. E. ziemlich gleichgültig, woran er Hand und Auge übt, wenn er sie übt.“ Im übrigen sei „der ganze Kursus der Quarta als Propädeutik zu betrachten“, und für jede einzelne ihrer ersten 24 Unterrichtsstunden wird (in Nr. 115, S. 277ff.) Stoff und Art der Behandlung ausführlich angegeben. Es soll danach viel gezeichnet werden, während Beweise ganz fehlen, indessen bald nach Gründen gesucht wird. Simon geht vom Klassenzimmer aus, läßt abschreiten, läßt Teile des Raumes, dann Linie und Punkt erkennen, darauf Ebene

sowie Strecke und deren Verlängerung, bald auch Kreis und dessen Teilung und Drehbarkeit in sich. Der Winkel wird „als Grenze des über jedes Maß wachsenden Sektors“ erfaßt, dann als Maß der Drehung benützt; Winkel werden geschätzt, gemessen und verwendet, zumal in Dreiecken, deren Winkelsumme durch Versuch gefunden wird. Reichliches Zeichnen wird fleißig geübt, dabei auch der Symmetrie genügend gedacht, hierbei wird auch der geometrische Ort behandelt usw., wie man das a. a. O. nachlesen mag. Ein Lehrbuch hierbei zu verwenden „halte ich für ein Verbrechen an den Schülern“.

In Würdigung von Simons Praxis muß man mit Freuden deren Grundgedanken anerkennen, nämlich Ausgehen vom Räumlichen, stete Beiziehung von Erfahrungen aus dem Leben, Abweisung der „Neuscholastik“ eines Ingrami und Veronese aus der Schule, Ablehnung von „Beweisen“, allmähliches Hinleiten zum Aufsuchen von Gründen, Verwenden des Schätzens und Messens, überhaupt Anschaulichkeit und Lebendigkeit des Betriebes. Aber auch der Bedenken gegen den von ihm vorgeschlagenen Betrieb gibt es und zwar grundsätzliche. Vor allem beschränkt sich solcher Unterricht viel zu früh auf bloß ebene Gebilde, eine eigentliche oder gar länger dauernde Übung im Vorstellen und im Umformen räumlicher Gestalten findet nicht statt; leider unterbleibt auch das gerade dafür und für die Selbstbetätigung der Schüler so nötige und förderliche praktische und vorstellende Modellieren. Freilich, dies alles als vermißt Bezeichnete erfordert Zeit, und Zeit verstattet der Simonsche Lehrgang nicht; in überschneller Hast wird wohl auf dem Papier des Berichtes alles schönstens abgemacht, aber, von wenigen ganz hellen Köpfen abgesehen, vermag nach meiner Erfahrung die Mehrzahl der Schüler einem solchen Eilgang nicht so zu folgen, daß sie wirklichen dauernden Gewinn davon hätte. Man beachte nur z. B. am a. O. den Lehrstoff der elften und zwölften Unterrichtsstunde — meine Erfahrung sagt, daß man für dessen Durchnahme bis zum vollen Besitz der Schüler mehr als nur wenige Stunden nötig hat, da nur reichliche und mannigfaltige Übungen jenes Ziel erreichen lassen, und dies ganz besonders, wenn man mit Simon (Didakt., S. 135) „den Winkel als den Kern des Quartapensums“ erklärt. — Betreffs der Klasse, in der oder des Alters, in dem solch geometrischer Unterricht zu betreiben ist, werde ich weiterhin (S. 105f.) meine von Simon abweichende Ansicht darlegen.

c) Nun bleiben noch gewisse Befürchtungen zu erwähnen und zu widerlegen, die von manchen Ängstlichen für den dem vorbereitenden anschaulich-geometrischen nachfolgenden sog. wissenschaftlichen Unterricht gehegt werden. Und zwar sind diese Befürchtungen doppelter Art. Es werde — so kann man als Einwand lesen und hören — durch jenen Vorläufer dem später, wie es heißt, ernst einsetzenden Unterricht sozusagen der Rahm abgeschöpft; die Schüler verlören für

den letzteren die rechte Teilnahme, weil sie glaubten, alles nun Vorkommende schon gehabt zu haben und zu wissen. Aber selbst wenn die Behandlung des Stoffes bei der ersten und bei der zweiten Durchnahme sogar manche Übereinstimmung zeigen sollte, so ist doch das zu beachten, daß inzwischen eine reichlich längere Zeit verstrichen ist, so daß sogar eine annähernde Wiederholung und Auffrischung des früher Gelernten dieses gewiß vertiefen und fester einzuprägen vermöchte. Aber sollen denn nicht bei richtigem Anfassen und Durchführen des Unterrichtes sowohl der auszuwählende Stoff wie die beiderlei Arten seiner Behandlung gründlich verschieden sein? Gerade die dem jedesmaligen Alter der Schüler angepaßte verschiedenartige Auswahl und Behandlung des Stoffes machen ja den vorbereitenden Unterricht an sich notwendig. Das sachgemäße richtige Vorgehen des Lehrers beim späteren Unterricht wird gewiß bei seinen Schülern nicht die Meinung aufkommen lassen, sie hätten das, was und wie dies behandelt wird, schon einmal gehabt. Wenn freilich der vorbereitende geometrische Unterricht, wie dies manche für ihn bestimmte Leitfäden fertig gebracht haben (man vgl. etwa Nr. 99), nur eine verwässerte Darbietung des Stoffes und Betriebes der höheren Stufe ist, dann freilich mögen jene Befürchtungen und Anklagen berechtigt sein — nur wird ein solcher Unterricht weder für dessen erste noch für seine zweite Stufe das Richtige sein.

Jene Befürchtungen für das Gedeihen des späteren wissenschaftlichen Unterrichtes in der Geometrie beziehen sich aber auch noch auf einen zweiten Punkt: der vorbereitende Unterricht führe bei den Schülern eine gewisse „Verflachung" und „Neigung zur Ungenauigkeit" herbei, und es werde durch ihn der „Sinn für das Beweisen" verdorben, da sie durch mehrjährige Gewöhnung an ein „ungefähres Klarmachen" und an stetes „Wahrscheinlichmachen" den Sinn und die Forderung für den strengen „Wahrheitsbeweis" nicht gewinnen dürften. Aber das gerade Gegenteil ist wahr, wie die Erfahrung beweist: bei richtigem Betrieb des vorbereitenden Anschauungsunterrichtes soll ja geradezu der Wunsch und der Sinn für die Notwendigkeit eines „Beweises" geweckt werden. Und er wird geweckt, wenn sich mehr und mehr in die Betrachtung der Formen und in deren Besprechung und Vergleichung auf Grund der inneren Anschauung die Fragen nach dem „Warum?" gewisser Behauptungen einschieben, wenn die zweifelhaften, unsicheren Ergebnisse des Messens und Zeichnens allmählich mehr und mehr zu sicheren Aussagen umgeformt werden sollen und dann tatsächlich umgeformt werden. Gerade auf diesem Wege, in allmählichem Ansteigen vom anschaulichen Erfassen zum begründenden Erkennen wird das Bedürfnis nach einem Beweis hervorgerufen, es wird so geweckt und mehr und mehr gestärkt. Somit sind in den beiden genannten Beziehungen die oft gehegten Befürchtungen unbegründet.

37. Im vorangehenden sind die Gegner überhaupt eines oder eines ausgedehnteren geometrischen Anschauungsunterrichtes zu Wort gekommen. Nun wollen wir auch einige Stimmen aus dem freundlicher oder freundlich gesinnten Lager vernehmen.

a) So sehr ich auch gegen Verschiedenes in Simons Lehrgang Einwendungen zu machen habe, so ist er doch als warmer Verfechter einer „experimentellen Elementargeometrie“ und der „Intuition“ ernstlich zu begrüßen. In eine Reihe mit Simon stellen sich die beiden anderen Bearbeiter ausführlicherer Anleitungen zum Erteilen mathematischen Unterrichts, nämlich F. Reidt (Nr. 71) und A. Höfler (Nr. 137), nur daß diese den vorbereitenden Unterricht länger als jener ausgedehnt wünschen.

Reidt spricht sich auf Grund theoretischer, an Wittstein sich anlehnender Betrachtungen, aber auch auf Grund paralleler entgegengesetzter Erfahrungen (S. 179 f.) sehr überzeugt für den genannten Unterricht aus (S. 180):

> „Aus dem Gesagten ergibt sich, daß der propädeutisch-geometrische Unterricht von der Anschauung auszugehen hat, mittels derselben die im Anfange des wissenschaftlichen Systems vorkommenden abstrakten Begriffe zu erläutern und einzuüben, endlich durch praktisches Operieren mit denselben auf die Wahrnehmung des gesetzlichen Zusammenhangs zwischen den Eigenschaften der behandelten Raumgebilde hinzuwirken und so allmählich auf die Einsicht in die Notwendigkeit einer Begründung dieses Zusammenhanges und das Wesen eines Beweises vorzubereiten hat. Als Hilfsmittel hierzu dient namentlich das Zeichnen von Figuren mit Zirkel und Lineal und die Beschreibung der Eigenschaften derselben.“

Als diesem Plan am besten entsprechend wünscht Reidt den Beginn mit Anschauung von Körpern und deren Beschreibung, an die sich das Zeichnen ihrer Umrißfiguren anzuschließen hätte, dieses nach Betrachtung „einer größeren Reihe verschiedenartiger Körper“. Letzterem widerspricht er freilich selbst — mit Rücksicht auf die wie üblich verfügbare geringe Zeit — durch die Forderung, daß „die Übungen an Körpermodellen nur in den ersten Stunden und an den einfachsten Formen vorzunehmen“ seien; mit der weiteren Forderung, daß „man sich auf ebene Zeichnungen beschränken soll, die der besonderen Vorbereitung auf die Beschäftigung mit der Planimetrie dienen“; hiermit kann ich mich, wie oben (S. 92 f.) ausgeführt, nicht einverstanden erklären. Auf Einzelheiten der Darlegungen Reidts habe ich weiterhin noch gelegentlich einzugehen.

In neuester Zeit haben sich auch andere berufene Stimmen deutlich für unsere Forderungen ausgesprochen, die Praktiker Seith (Nr. 127) und Wieleitner, Löffler (Nr. 136) und Höfler (Nr. 137).

Seith erklärt (S. 186) den unseren Forderungen gerecht werdenden „Lehrplan der badischen Oberrealschulen in der Lehraufgabe der Quinta und Quarta als richtigen Weg zum (weiteren) Arbeitsgebiet: aus der Analyse der Raumgebilde gewinnt der Schüler die Elemente, durch Zeichnen und Modellieren ebener Figuren lernt er die Gesetzmäßigkeit von Lage und Größe erkennen, durch Zerteilen und Zusammensetzen übt er die Fähigkeit, in zielbewußter Weise zu variieren. Dabei ist das vorgeschriebene Verfahren durchaus durchdrungen vom Geiste der geometrischen Methode, es ist wissenschaftlich."

Löffler kennzeichnet (S. 329) die verschiedenen bestehenden Ansichten, insbesondere die zu äußerst stehenden, über den geometrischen Anschauungsunterricht: die eine Auffassung halte, wenn auch in gemildeter Form, an Euklid fest, wie dies weit verbreitete und sogar amtlich als Muster aufgestellte Bücher beweisen [vgl. oben S. 52 f. betreffend Spieker in Württemberg! —], die andere Ansicht sieht allein im Zeichnen „die wahre Propädeutik für die Geometrie"; jene erstere Auffassung sei „die Methode der reinen Logik", diese letztere sei die der „reinen Anschauung". Löffler glaubt aber, und mit Recht, daß diese beiden „Extreme" zu vermeiden seien.

Löffler gibt seine Auffassung in folgendem (S. 330): „Ich glaube, wir müssen mit dem beginnen, was in dem Geist des Schülers selbst gegeben ist: mit der Anschauung und mit der Anleitung des Tätigkeitstriebes. Da aber Anschauungen ohne Begriffe blind sind, so wird es sich darum handeln, gleichzeitig, gewissermaßen spielend, dem Schüler einen kleinen, aber wichtigen Stamm von klaren Begriffen zu übermitteln. ... Ferner ist es wichtig, den Schüler von Anfang an sehr häufig den engen Zusammenhang der Geometrie mit der Praxis, der Technik, der Architektur usw. fühlen zu lassen." Er möchte deshalb u. a. behandelt wissen (S. 331) Kreis ... Taschenuhr ... Kreisteilung, „und wir kommen so schließlich auf den Winkel ...". Hierauf folge die achsiale Symmetrie ... das Parallelenaxiom ... die drei wichtigen Parallelensätze nebst ihren Umkehrungen und Folgerungen. ... „Mit den Sätzen von den Innenwinkeln und Außenwinkeln des Dreiecks ... kann der eigentliche propädeutische Kurs seinen Abschluß finden."

Anschließend sei beigefügt, daß auch Löffler (S. 331) die außerordentlich rege Teilnahme der Schüler an einem solchen Unterricht bezeugt.

Und auch der zweite der genannten, Höfler, tritt lebhaft für eine anschauliche Raumlehre auf der Unterstufe ein, wie er denn überhaupt im Sinn der nachfolgend sogleich zu betrachtenden Meraner Vorschläge eine stärkere Berücksichtigung der Raumanschauung auf allen Stufen des Unterrichts durchgeführt wünscht. Er verlangt (S. 30) im Gegensatz zu gewissen Übergründlichen als „Beispiel von

systematisch-pädagogischer Ungründlichkeit" „unter bewußtem Verzicht auf eine auch nur halbwegs streng logische Begründung für den Anfang fast ausschließlich die empirische Gewinnung und Erwerbung der Sätze durch Nachmessen u. dgl."

Höfler fordert (S. 33) unter Hinweis auf F. Klein die Durchführung des „längst nicht mehr bestrittenen pädagogischen Grundsatzes: Das Konkrete vor dem Abstrakten", und er weist mit Recht darauf hin (S. 34), „daß auch für Raum und Zahl praktisch-pädagogisch dasselbe gilt, was wir in der Naturwissenschaft doch nicht nur einsehen, sondern auch für die unverbrüchliche Regel unseres Lehrens gelten lassen: daß zuerst die Einzeltatsache gegeben und erkannt sein müsse, ehe man zu den Beziehungen zwischen den Einzeltatsachen gelangt; daß es an empirischen Grundlagen nicht fehlen dürfe, wie hoch über sie sich auch nachmals das Gebäude der Deduktionen emportürmen möge" —

und weiter (S. 52):

„Für zehn- bis dreizehnjährige Kinder gibt es noch keine mathematische Wissenschaft', weder in Definitionen noch in Beweisen, die ihnen ‚beigebracht' werden müssen. Anschauen und Tätigsein — Betätigung zuerst mit der Hand, dann mit dem Hirn — muß vor allem die Materialien herbeischaffen, die der späteren logischen Bearbeitung überhaupt erst Stoff und Angriffspunkte bieten. Wer ohne Anschauung und ohne manuelle Tätigkeit sogleich logische Formulierungen ‚beibringen' will, bringt keineswegs diese oder überhaupt welche Gedanken bei, sondern er bringt nichts bei als leere Wörter."

In Betätigung solcher Grundsätze zeigt darauf Höfler (S. 89—91) an einem Schulbeispiel, wie das Verfahren in der Schule nicht sein soll, und weiterhin (§ 13, S. 94—118) gibt er in „Skizzen zu einer Vorschule der Raumlehre" die Art und Weise, wie er den betreffenden Unterricht gestaltet wünscht. Er geht aus vom Würfel und Quader, läßt deren Bestandteile erkennen und zum Teil nachbilden, geht über zur Kugel und damit alsbald zu Kreis, Zirkel und Ellipse, darauf zur Verwendung von Lineal und Winkelscheit, sowie zur Betrachtung von Winkel- und Bogenmaß (Winkelmesser); hierauf werden die Arten des Dreiecks und seine Winkel, parallele Geraden und Ebenen, sowie die Grundgedanken und Modellierungen der Grundrißbildung betrachtet.

In richtiger Auffassung weist Höfler diesen scheinbar geringen Stoff als voll ausreichend dem ersten Schuljahr zur Verarbeitung zu, und ich kann dem auf Grund eigener langjähriger Erfahrung nur zustimmen. Ebenso bin ich mit den Grundzügen seiner Stoffbehandlung im wesentlichen einverstanden; meinen etwas abweichenden Lehrgang zeigt der dritte Hauptteil der vorliegenden Schrift.

b) Eine besondere Erwähnung und Besprechung verdienen hier schließlich noch die sog. „Meraner Vorschläge", deren hierher gehöriger Teil schon früher (S. 58) im Wortlaut angegeben worden ist.

So anerkennens- und dankenswert nun auch die darin verlangte grundsätzliche Einführung eines vorbereitenden geometrischen Unter-

richts ist, so scheint mir doch verschiedenes in der Anweisung zur Ausführung und Ausgestaltung im einzelnen nicht so gelungen zu sein, wie es erwünscht wäre, und zum Teil selbst nicht im Einklang zu stehen mit den Grundgedanken, die zu Beginn des Berichtes (S. 104) entwickelt werden. Meine Bedenken sind die folgenden.

Fürs erste scheint mir die diesem Unterricht grundsätzlich (a. a. O. S. 106) zugeteilte Zeit in zweifacher Hinsicht zu kurz zu sein. Zunächst ist die angegebene Erstreckung auf ein einziges Schuljahr gewiß nicht ausreichend, um der Grundforderung einer „Ausbildung und Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens" gerecht zu werden. Die Durchführung einer solchen Absicht erfordert die Einwirkung eines derartigen Unterrichts doch mindestens während zweier Jahre, damit das Anschauungsvermögen auch wirklich grundlegend geübt werde — handelt es sich doch in erster Reihe nicht um die Einprägung eines bestimmten Wissensstoffes, sondern um die Ausbildung von geistigen und, ich füge hinzu, körperlichen Vermögen. Dann aber ist die nach dem angegebenen Plan dem betreffenden Unterricht innerhalb des Quintajahres zugewiesene Zeit allzu knapp bemessen, wenn in vier Wochenstunden dieses Jahres der ziemlich umfangreiche Rechenstoff bewältigt und die vielfache Übung erfordernde Rechenfertigkeit erzielt werden soll und wenn daneben auch noch die angegebenen geometrischen Übungen durchgeführt werden sollen. Zur Erreichung von beiderlei Zielen sollten hier (wie nachher in Quarta) fünf Wochenstunden angesetzt werden, und zwar im Verhältnis der Gesamtausteilung von Zeit (aber nicht als einzelne Wochenstunden angesetzt[1])) etwa 2, wenn auch nicht abgelöste 2 der 5 Stunden für die Beschäftigung mit Geometrie.

Zweitens: wenn verlangt wird, daß bei der Einführung und gerade bei der Einführung in die Grundbegriffe der Raumanschauung „der Raum vorwiegend als Träger planimetrischer Beziehungen erscheinen" soll, so scheint mir dies der Grundforderung einer Pflege des „räumlichen" Anschauungsvermögens nicht sonderlich zu entsprechen. Dieser Forderung kann doch wohl nur durch Betonen der Raumfiguren voll genügt werden, bei deren Betrachtung sich dann selbstverständlich auch die „planimetrischen Beziehungen" einstellen.

Drittens muß ich mich dagegen aussprechen, daß die Raumbetrachtungen „zunächst an der Umgebung erläutert und dann an den verschiedensten Körpern bestätigt" werden sollen. Die Formen der Umgebung zeigen, insoweit unser Unterricht und die Beziehungen des Schülers zu ihnen in Frage kommen, verschiedene Mißstände: sie sind nicht einfach genug, da sie verschiedenerlei gleichzeitig zeigen und so leicht zur Teilung des Interesses, zur Ablenkung der Auf-

1) Vgl. weiterhin S. 108.

merksamkeit führen; sie sind vielfach nicht im Gesichtskreis des Schülers und können dann nicht als Dinge äußerer Anschauung verwertet werden, so daß die innere Anschauung erst nachfolge; sie sind, wie sie sind, aus einem einzigen bestimmten Stoff gefertigt und von gegebener Größe, so daß die Ableitung der reinen Raumform sich schwer ergibt; weiter aber sind jene Formen der Umgebung vielfach, auch wenn sie im Gesichtskreis des Schülers, d. i. im Schulzimmer sich finden, zu weit entfernt und meistens nicht von ihrem Platze entfernbar, also auch nicht so betastbar und behandelbar, wie es für unseren völlig grundlegenden Unterricht durchaus nötig ist; endlich sind sie meistens, auch wenn sie selbst einfach genug sind, doch nicht so völlig zweckentsprechend wie dies wünschenswert ist. Aus all diesen Gründen bin ich der Meinung, daß eigens für unseren Unterricht angefertigte einfache Körperformen, jeweils von verschiedener Größe und aus verschiedenartigem Stoff hergestellt, die Grundlage für die gemeinsamen, in Rede und Gegenrede durchzuführenden Betrachtungen und Ableitungen abgeben müssen, und daß dann die ihnen mehr oder minder genau entsprechenden oder verwandten Formen in der mit den äußeren Sinnen erreichbaren Umgebung der Schüler aufgesucht, besprochen und verglichen und daß dann auch die in deren Vorstellungsgebiet enthaltenen Formen beigezogen werden. Mein Vorschlag zur Aufstellung eines Lehrplans käme also an der beregten Stelle hinaus auf eine Umkehrung in der von dem Unterrichtsausschuß angegebenen Reihenfolge der Betrachtung.

Viertens kann ich mich nicht damit einverstanden erklären, daß erst an den als Teilen der Körperbegrenzung abgeleiteten, aber dann als selbständigen Gebilden aufgefaßten „ebenen Figuren die Begriffe der Richtung und des Parallelismus zum Verständnis zu bringen“ seien. Im Gegenteil — gerade diese Begriffe werden am besten unmittelbar bei der Betrachtung von Raumfiguren gewonnen und hier durch vielfältige Übung zum vollen Verständnis gebracht und werden dann von hier aus leicht auf die nachfolgend zu behandelnden ebenen Figuren übertragen und hieran verwertet. Der Begriff des Winkels lehrt sich aber am einfachsten und besten an der Uhr bzw. an passenden Uhrmodellen; denn hier ist im gewaltigen Vorzug vor den Körpern der Umgebung und vor Körpermodellen die Unterlage für den zu gewinnenden und festzulegenden Begriff jeden Augenblick und nach Belieben veränderlich, und überdies können behufs richtiger Auffassung und Vermeidung von Irrtümern den Zeigern beliebige Verlängerungen angefügt werden. Auch hier erfolgt dann erst die Übertragung des erlangten Verständnisses auf die abgeleiteten reinen Figuren der Ebene.

Schließlich fünftens will es mir gar nicht gefallen, daß die Vorschläge des Unterrichtsausschusses als Unterstützungsmittel bei der vorbereitenden Grundlegung geometrischer Lehre zwar „beständiges

Zeichnen und Messen“ fordern, aber nicht das so anregende und fördersame „Ausschneiden und Modellieren“. Die neuere Unterrichtslehre fordert doch bekanntlich aus allgemeinen, hier nicht darzulegenden Gründen neben der sittlichen und geistigen Ausbildung des jugendlichen Menschen mehr und mehr auch dessen Förderung nach der körperlichen Seite hin, also die Pflege von Körperübungen verschiedenster Art. Nicht die letzte solcher Forderungen ist das Verlangen nach eigener Ausbildung auch der Sinne und der Handfertigkeit unserer Jugend, und es ist bekannt, wie sehr in erfreulicher Weise auch an den Mittelschulen die Pflege der Handarbeit zunimmt. Wenn nun ein solcher Unterricht als wünschenswert oder notwendig erkannt und gebilligt wird, wenn er sogar als abgetrennter eigener Unterrichtszweig ein- und durchgeführt wird, wie mag man ihn auf die Seite setzen oder ganz übersehen da, wo er wie im geometrischen Elementarunterricht sich so naturgemäß darbietet, wo er bei seiner Berücksichtigung als Selbstzweck betrieben werden kann, wo er aber gerade die Hauptaufgabe dieses Elementarunterrichtes, die „Stärkung des räumlichen Auschauungsvermögens“, so wesentlich zu fördern vermag? Wie mag man das Ansschneiden und Modellieren als Ziel wie als Mittel des Unterrichtes unbeachtet lassen oder vergessen zu erwähnen, da es eine volle Selbstbetätigung des Schülers darstellt, den Formsinn weckt (sogar im unvollständig gelungenen Modell!) und jedem Unterricht ein äußerst belebendes und, wie er ja vorkommen soll, selbst einem langweilenden Unterricht ein erfrischendes und zeitweilig von der Langenweile befreiendes Element beimischt? Es wird ja freilich in den Vorschlägen des Unterrichtsausschusses (S. 112) die „Benutzung von Modellen“ empfohlen; aber das ist aus den angeführten Gründen durchaus nicht hinreichend, es müßte unbedingt hinzukommen „Anfertigung von Modellen flächen- und körperartig ausgedehnter Gebilde“. Wie im einzelnen die erwähnte Betätigung von Auge und Hand des Schülers in Verbindung mit Maßstab, Winkelmesser und Zirkel gestaltet und durchgeführt werden kann, soll weiterhin (im dritten Abschnitt) des näheren dargelegt werden.

38. In den vorangehenden Betrachtungen habe ich meine eigene Auffassung über unseren Gegenstand vorgetragen und m. E. begründet, und ich habe auch Gegnern und Freunden der Sache in Hauptvertretern das Wort hierzu gelassen. Ich gehe jetzt dazu über, wie angekündigt (S. 75) Anfangszeit und notwendige Dauer eines solchen zunächst vorbereitenden, aber auch in gewisser Weise selbständigen geometrischen Anschauungsunterrichtes zu besprechen, also die Frage zu beantworten, für welches Schüleralter Beginn und Durchführung dieses Unterrichtes anzusetzen ist, und wie im Verlaufe der Wochen die Zeitausteilung am besten festgelegt wird.

a) Was die Zeit des Beginnens betrifft, so wurde schon oben (S. 62 ff.) erwähnt, daß zumal englische und französische Methodiker einen sehr frühen Beginn geometrischer Unterweisung wünschen und einen solchen auch ausgeführt haben. So weisen die beiden Young (Nr. 128, S. VI) „Kindern von 7 und 8 Jahren“ entsprechende Anleitung zu, „aber auch schon Kindern im Alter von 4 und 5 Jahren und zwar solchen von sehr verschiedenartiger Begabung — so sagen sie — können gewisse Teile der Geometrie Unterhaltung bieten. Und auch Laisant will (S. 63) ähnlichen Unterricht Kindern von 4 bis 11 Jahren gegeben wissen. Damit wäre also eine Vertiefung der üblichen Beschäftigungen in den Fröbelschen Kindergärten gegeben oder auch eine Anleitung für private häusliche Unterrichtsweise.

Hier, in unserem Fall, haben wir es aber mit dem Massenunterricht ganzer Klassen der höheren Schulen zu tun. Falls dieser in voller Strenge als sog. rein wissenschaftlicher Unterricht durchgeführt werden soll, darf oder kann man ihn freilich nicht in einer der unteren Klassen beginnen. Im württembergischen Realgymnasium Dillmannscher Schöpfung war früher der Beginn des geometrischen Unterrichtes erst für Obertertia angesetzt, und Dillmann selbst meinte, daß man eigentlich erst in Untersekunda damit beginnen sollte — wohl mit Recht, wenn dabei alsbald in die Form und in die Strenge euklidischer Behandlung eingetreten werden müßte. Seit einigen Jahren hat man aber auch dort, in Stuttgart, den Anfang dieses Unterrichtes nach Untertertia zurückverlegt, wie denn überhaupt in Süddeutschland seit langem Untertertia die Anfangsklasse für den strengeren geometrischen Unterricht gewesen und bis heute geblieben ist. In Norddeutschland legen bekanntlich die Lehrpläne seit Jahrzehnten den Beginn jenes Unterrichtes für Quarta fest — nach meiner und von vielen geteilter Meinung (s. Strack Nr. 60, S. 9) für eben diesen Unterricht zu früh, für den Unterricht in vorbereitender Geometrie aber zu spät.

Denn von verschiedenen Seiten ist geltend gemacht worden, daß der Beginn geometrischer Unterweisung selbst schon in Sexta nicht zu früh sei. So sagt Graßmann (Nr. 4): „Ungezweifelte Erfahrungen haben mich überzeugt, daß dieser Unterricht schon mit 7- bis 8jährigen Kindern gut von statten ging, und daß die Kinder sehr viel Teilnahme für denselben bezeigten, auch späterhin immer eine besondere Vorliebe für ihn behielten.“ Ebenso spricht sich z. B. Strack (Nr. 62, S. 9) dahin aus, daß „mit dem Eintritt des Schülers in die höhere Schule auch die geistige Reife für die geometrische Propädeutik vorhanden sein dürfte“, und F. Klein (Nr. 125, S. 32) wünscht ebenfalls einen frühen Beginn: „Ich meine, der besagte Kurs könne schon auf Sexta oder doch wenigstens Quinta beginnen, indem das Rechnen dort einen Teil seiner Stunden abgibt; erst dann wird dieser Unterricht seine

volle Ergiebigkeit entfalten können." Auch Reidt (Nr. 71, S. 181) erklärt an Körpermodelle angelehnte Betrachtungen und Zeichnungen „schon für die jüngsten Schüler, also für die Sextaner, ja zum Teil wohl schon für die Vorschul- oder Elementarklassen geeignet", und Höfler (Nr. 137, S. 118) erstrebt „als die wünschenswerte Unterrichtszeit für diese ersten Übungen der Raumlehre etwa die Hälfte der Mathematikstunden durch das ganze erste Schuljahr (ausgenommen die ersten paar Wochen, damit man den Schüler rasch und unzerstreut in die Rechenübungen hineinkommen lasse)".

Während Hoffmann (H. Z. 20, 389) die geometrische Formenlehre „mindestens gleichzeitig mit der Arithmetik begonnen" wissen will, erachtet es Erler[1]) „für geboten, statt mit Arithmetik mit Geometrie den eigentlichen mathematischen Unterricht zu beginnen". Direktor Hense erklärt es (H. Z. 1 [1870], S. 78) als einen „großen Gewinn, wenn in Quarta nur Rechnen und propädeutische Geometrie wäre", wogegen Böttcher (Nr. 98, S. 629) den „unerläßlichen" Vorkurs, den er die „Ouvertüre zum thematischen Reichtum der ganzen Geometrie auf der Schule" nennt, nach Quarta verlegt; und Pick (H. Z. 20, 389) ist der Meinung, daß „Formenlehre nicht früh genug beim Anschauungsunterricht Berücksichtigung finden" könne, weil die Form der Dinge dem Kind früher auffällt als deren Zahl. So ist von den Genannten und auch sonst wiederholt darauf hingewiesen worden, daß bei einer solchen Gestaltung des Lehrplanes, die in erster Reihe gemäß der geistigen Entwickelung des jugendlichen Menschen ausgearbeitet ist, der geometrische Unterricht als der anschaulichere, bequem auch ins praktische Tun übersetzbare dem Rechenunterricht als dem weit abstrakteren zeitlich vorangehen müßte. Nach der Entwickelung des Volksschulwesens aber und bedingt durch die Forderung des praktischen Lebens, dem eine gewisse Rechenfertigkeit auch in frühester Jugend höher gilt als ausgebildetere Raumauffassung, ist an eine solche zeitliche Umstellung der beiden Lehr- und Lernstoffe nicht zu denken. Somit muß auch die an die drei oder vier ersten Volksschuljahre sich anschließende höhere Schule sich damit abfinden, daß in deren unterster Klasse[2]) als mathematischer Teil des Unterrichtes das Rechnen mit bestimmten Zahlen gegeben ist. Wenn aber dieses genügend kräftig geübt und zur Fertigkeit werden soll und weil hier ohnehin (leider schon!) Latein oder eine neue Fremdsprache als wesentlich Neues hinzutritt, so erfordert die Rücksicht auf Nichtzersplitterung von Kraft und Teilnahme der Schüler, daß nicht schon hier ein be-

---

1) Bericht über die preußischen Direktorenkonferenzen S. 165, § 115.

2) Im größten Teil Deutschlands ist dies die Sexta, in Württemberg und Bayern die erste Klasse (für die 9- bis 11jährigen), in Österreich die erste Klasse (d. i. die der 11- bis 13jährigen Schüler).

sonderer Unterricht in Raumlehre (außer gewissen selbstverständlich innerhalb des Rechnens zu behandelnden Teilstücken desselben) erteilt werden kann und darf. Somit verschiebt sich für Deutschland der Beginn des geometrischen und zwar natürlich des anschaulich geometrischen Unterrichtes auf die zweitunterste Klasse (Quinta) und zwar auf deren Beginn. Und auch die Stimmen, die für einen früheren Anfang als das eigentlich Richtigere sich aussprechen, fügen sich dem Zwang der Verhältnisse, wie ich ihn angab. So ist derselben Ansicht auch Schotten (Nr. 89, S. 25f.), der den genannten Unterricht bei Rückschiebung der Arithmetik „noch durch die ganze Quarta hindurch fortgesetzt" wünscht, da er „so erst in seiner vollen Bedeutung zu Tage trete"; und während ganz vereinzelt Zizmann (Nr. 32, S. IX) solchen Unterricht erst in der Obertertia (seiner Koburger Realschule) wiederholt erteilt hat, verlangt auch Höfler (Nr. 137, S. 118) den Beginn mit unserer Quinta und zwar alsbald nach deren Anfang; „erst im zweiten Halbjahr oder gar erst im nächsten oder übernächsten Schuljahr zu beginnen, wäre ein unnötiges Verzögern dieses echten Anschauungsunterrichtes".

Schon 1872 hatte sich Gerhardt dahin ausgesprochen (H. Z. 3, 407): „Der Unterricht in der Geometrie wird meist nach euklidischer Anordnung gegeben. Das hat mehrfache Nachteile: man kommt dann selten zu allgemeinen Gesichtspunkten, kann die neuere Geometrie nicht verwerten und ist genötigt, die Stereometrie scharf von der Planimetrie zu trennen. Man beginne doch gleich mit Raumanschauungen und zwar kann dies schon in Quarta geschehen. Dies fordern auch mehrere Koryphäen der neueren Zeit, so Riemann und Helmholtz."

Im schärfsten Gegensatz zu den hier vorgetragenen Auffassungen steht die von M. Simon (Nr. 128, S. 42 uud Nr. 95, S. 45). Im Widerspruch mit der amtlichen Vorschrift von 1901 für die Quinta der preußischen Oberrealschulen („Propädeutischer geometrischer Anschauungsunterricht") und im Widerspruch zu den Meraner Vorschlägen von 1905, die auch für die Quinta der Gymnasien „Propädeutische Raumlehre" ansetzen, erklärt Simon, daß eine solche, wie für Preußen geplant gewesen, nicht nach Sexta gehöre; „aber auch in die Quinta gehört sie nicht". Begründet wird diese Ablehnung einesteils mit Rücksicht auf den Rechenunterricht, dem von seinen vier Wochenstunden keine Minute genommen werden dürfe, wenn „einigermaßen Geläufigkeit und Verständnis der Bruchrechnung" erreicht werden sollen, anderseits im Hinblick auf die Geometrie, die durch jenen vorbereitenden Unterricht „nicht gefördert, sondern direkt geschädigt" werde.

Was den ersten Einwand betrifft, so ist die geringe Rechenfertigkeit in den oberen Klassen ein auch für diejenigen Schulen

bekanntes Übel, die keine Geometrie in Quinta lehren, und sie ist die Folge des Einschlafenlassens des Zahlenrechnens in den mittleren Klassen. Und in bezug auf die zweite Einrede könnte Simon doch wohl wissen, daß man den Quintanern, falls sie geometrischen Unterricht erhalten sollten, durchaus nicht solch töricht einfache Sachen zumutet, wie er spottend vorbringt[1]); und wenn er gewisse gedruckte entsprechende Anfangsgründe „dogmatisch, um nicht zu sagen ledern gestaltet“ nennt (worin ich ihm übrigens beistimme), so scheint mir der Schluß von einem Fall auf alle doch recht verfehlt. „Vor lehrplanmäßiger Propädeutik in V kann ich nur warnen — fügt Simon bei —, sie ödet den Schüler an, nimmt der Geometrie den Reiz der Neuheit und erschwert die spätere logische Erziehung. Die Propädeutik gehört in die Quarta.“ Wenn diese drei hier gedrängt beisammen stehenden Anschuldigungen berechtigt wären, sollten sie dann nicht ganz oder fast ebenso gut gegen einen Quartabetrieb vorgebracht werden können! Fußen sie doch nicht auf der Voraussetzung eines geringeren Auffassungsvermögens bei 11- als bei 12jährigen Schülern und nicht auf der Annahme zu gering zugemessener Zeit! Wenn Simon glaubt, vor lehrplanmäßiger Propädeutik in V „warnen“ zu müssen, da sie den Schüler „anöde“, so muß ich gestehen, daß mich jene Abweisung und diese, wie man meinen könnte, tatsächliche Feststellung sehr verwundern und daß sie wohl nur zu erklären sind aus Mangel an Erfahrung. Dem entgegen kann ich mich auf ausreichende Schulerfahrung berufen. Wiederholt habe ich in aufeinander folgenden Jahren in V, IV und UIII bei freilich fünfstündigem Unterricht außer Rechnen auch geometrischen Anschauungsunterricht in dem hier wiederholt angedeuteten und weiterhin ausführlicher darzulegenden Geist und Umfang selbst gegeben, und ich muß sagen, daß ich in meiner nun 44jährigen Lehrertätigkeit (außer einem Gymnasial-Primakurs in neuerer synthetischer Geometrie) niemals mehr Lehrbefriedigung empfunden habe und nie lebhaftere Teilnahme von Schülern am mathematischen Unterricht gesehen und genossen habe als gerade bei jenem elementaren Geometrieunterricht. Und eine Reihe meiner Kollegen machten seit Jahren ähnliche Erfahrungen. Also meine Meinung geht mit Simon dahin: die Propädeutik gehört freilich in die Quarta — im Gegensatz zu ihm sage ich aber: sie gehört auch schon in die Quinta und in diese letztere Klasse erst recht.

---

1) A. a. O. S. 42: „Was die „Förderung des Anschauungsvermögens“ betrifft, so haben unsere Quintaner helle von der Schule noch nicht verdorbene Augen im Kopfe und sie brauchen den Lehrer nicht, um zu wissen, wie ihre Bälle, Kreisel, Würfel, Trommeln usw. aussehen. Gas- und Wasserrohre bekommen sie bei dem ständigen Aufwühlen der Straßen genügend zu sehen. Auch Zuckerhüte, Lampenzylinder, Ofenrohre, Dampfkessel und Kanonenrohre schauen sie genügend.“

39. b) Es erübrigt noch, über die Zeitdauer einer vorbereitenden anschaulichen Raumlehre etwas beizufügen. Diese Zeitdauer hängt naturgemäß in erster Reihe von dem Ziel ab, das man ihr steckt, und von der Menge des sonstigen Unterrichtsstoffes, der in der gleichen Zeit ebenfalls behandelt werden soll, demgemäß natürlich auch von der Anzahl von Wochenstunden, die dem betreffenden mathematischen Unterricht zur Verfügung stehen.

Das Ziel einer solchen Anschauungslehre wurde früher stets und wird auch jetzt noch meist dahin festgesetzt, daß sie die allernötigsten Grundvorstellungen für einen mehr oder minder dogmatischen Lehrgang in ebener Geometrie zu beschaffen habe. Demgemäß erledigt man in § 1 einige „Vorübungen“ an Körpermodellen, fügt in § 2 die sich ergebenden „Grundbegriffe“ bei und geht alsbald zum euklidischen Lehrstoff über. Zu solchem Betrieb genügen in der Tat wenige Stunden, höchstens die Unterrichtsstunden weniger Wochen. So erklärt Gille die Zeit von Ostern bis Pfingsten (etwa 6 Wochen) dafür als ausreichend, daß „der Quartaner hinreichend vorbereitet sei“ (Lehrproben und Lehrgänge, Heft 79 [1904], S. 96). Junghähnel (Nr. 53) verlangt, freilich dem damaligen sächsischen Lehrplan sich anbequemend, für seinen Vorkurs „einige 20 Lehrstunden“ in Quarta. Auch Weingärtner (Nr. 63) ist „nicht dafür, daß der geometrische Anschauungsunterricht zu weit ausgedehnt und daß, wie einige vorschlagen, durch denselben allmählich in die wissenschaftliche Behandlung der Geometrie übergeleitet werde“ (S. 2), weil „die Empirie immer nur eine zweifelhafte Gewähr für die absolute Richtigkeit eines geometrischen Satzes bieten kann“. Dabei spricht er es aber als seine Erfahrung aus, es sei kaum glaublich, wie ungeschickt und unbehilflich Schüler im Gebrauch der Zeichenininstrumente sind und wie es bei solchen vielfach nur „Schmiererei“ absetzt — und gleichwohl mutet er ihnen gleichzeitig mit den so notwendigen und für sich zu betreibenden Grundübungen die volle Abstraktion zu!

Dem entgegen verlangt schon Lichtenberg (Nr. 23, S. 28), daß „der ganze (vorbereitende) Lehrgang auf drei Klassen mit einjährigem Kreislauf verteilt“ werde, und dabei „werden an Stunden wöchentlich zwei nötig sein“. In der Tat, schon wenn nur, auch nach Gille, z. B. „dem Zeichnen von Figuren mit Lineal und Zirkel“ Zeit gewidmet und „durch solche methodische Ausbildung der Anschauung“ (!) der „davon ausdrücklich zu unterscheidende geometrische Unterricht vorbereitet“ werden soll, so bedarf es hierzu gewiß einer etwas längeren Zeitstrecke.

Etwas anderes aber ist die Forderung einer systematischen „Pflege der räumlichen Anschauung“, wie sie in der vorliegenden Schrift ausgestaltet vorgeführt wird: sollen hierbei die Geisteskräfte der jugendlichen Schüler angeregt und entwickelt werden, soll, wie

Pestalozzi wünschte, „Kopf, Herz und Hand" geübt, sollen also die verschiedenen notwendigen Hilfsübungen vorgenommen werden, so bedarf es längerer Zeit dauernder Einwirkung in diesem Sinn. Zweiundeinhalb bis drei der üblichen Schuljahre nimmt ein solcher, wie ich es auffasse, richtig geleiteter geometrischer Vorunterricht in Anspruch, und ich stimme hierin ganz und gar mit Höfler (Nr. 137) und, in gewisser Beschränkung, mit dem seit 60 Jahren in Österreich eingehaltenen amtlichen Verfahren überein. Wie diese längere Zeit mit Arbeit ausgefüllt werden kann und wie sie tatsächlich auszufüllen ist, soll eben der im dritten Abschnitt ausführlich dargelegte Lehrgang aufzeigen.

40. c) Was endlich die Zeitausteilung innerhalb der in der einzelnen Woche lehrplanmäßig verfügbaren Stundenzahl betrifft, so wird sie in manchen amtlichen Verordnungen ganz der Schule bzw. dem einzelnen Lehrer überlassen (Preußen); zum Teil aber ist so verfügt, daß dem geometrischen Anfangsunterricht eine bestimmte Anzahl abgetrennter Wochenstunden zugewiesen wird. So haben die bayrischen Realschulen in der mit Geometrie beginnenden dritten Klasse 2 der 5 Wochenstunden der Raumlehre zu widmen; die österreichischen Realschulen vergönnen der Raumlehre in den ersten vier Jahren nur je eine Stunde wöchentlich, die Gymnasien aber haben von den je 3 mathematischen Wochenstunden umschichtig abwechselnd je eine auf Arithmetik und je eine auf Geometrie zu verwenden.

Mit solcher Zeitausteilung mag ich mich nicht befreunden. So wenig man einem Kinde zumutet, wenn es das Klavierspielen zu erlernen beginnt, diesem jedesmal eine ganze Stunde zu widmen, ebensowenig scheint mir das bei der Geometrie zuzutreffen; zwei halbe Stunden sind auch hierbei mehr als eine ganze Stunde.

Ich möchte vorschlagen und habe es auch wiederholt jahrelang so durchgeführt, daß mit seltenen Ausnahmen in jeder Stunde mathematischen Unterrichtes der Anfangsklassen Übungen in der Raumlehre veranstaltet werden, bald nur 10 oder 20 Minuten, ein andermal eine halbe, wohl auch ab und zu eine ganze Stunde, je nach dem einen Abschluß ermöglichenden Stoffgebiet. Soll das Ziel einer gewissen Ausbildung in der Raumvorstellung erreicht werden, so bedarf es häufiger und steter Einwirkung auf das Vorstellungsvermögen. Auch hierbei gilt: Der Tropfen höhlt den Stein. Und andererseits verlangt der jugendliche, fast noch kindliche Geist des 10- bis 12-jährigen Schülers Abwechselung im Stoff und in der Behandlung, wenn er für die ganze Stunde frisch und aufnahmefähig bleiben soll; und dies gilt in gleicher Weise auch für das Rechnen, und so kommt auch letzteres bei steter Mitbehandlung von Geometrischem erfahrungsgemäß besser zu seinem Recht, braucht jedenfalls bei solchem Verfahren nicht notzuleiden.

Dritter Abschnitt.

Praktische Gestaltung des geometrischen Anschauungsunterrichtes.

41. Im ersten Abschnitt der vorliegenden Schrift wurde die geschichtliche Entwickelung des geometrischen Anschauungsunterrichtes dargelegt, und im zweiten Abschnitt sind die Forderungen aufgestellt worden, die betreffs eines den verschiedenen Ansprüchen dienenden geometrischen Unterrichtes unserer höheren Schulen zu erheben sind, und es wurde betreffs des ausgedehnteren geometrischen Anschauungsunterrichtes, welcher der Unterstufe als Aufgabe zuzuweisen ist, im wesentlichen die Begründung seiner Notwendigkeit dargetan, auch wurden Gegner und Freunde eines solchen Unterrichtes gehört und ihre Einwendungen oder unvollständigen Empfehlungen besprochen. Nun soll endlich noch hier im dritten Abschnitt des ersten Hauptteiles die praktische Gestaltung eines geometrischen Anschauungsunterrichtes vorgeführt werden und zwar der Hauptsache nach in der Form, wie ihn der Verfasser tatsächlich wiederholt mit Freude und Erfolg durchgeführt hat, so daß hiermit auch der Nachweis erbracht ist, daß in der nachfolgend dargelegten Weise dieser Unterricht wirklich erteilt werden kann.

Zum Verständnis und zur vollen Einsicht in die Art solchen Unterrichtsbetriebes empfiehlt es sich, zunächst noch ein paar allgemeine Bemerkungen vorauszuschicken, nämlich zuerst die leitenden Gedanken für die von mir gewählte Gestaltung des Lehrverfahrens im Überblick anzugeben, dann den Gang des Lehrverfahrens im allgemeinen zu kennzeichnen und ihn des näheren durch **zwei Beispiele** zu erläutern, endlich auch die Werkzeuge und Hilfsmittel namhaft zu machen, die für eine gute Durchführung notwendig oder wünschenswert sind und in deren Handhabung die Schüler geübt werden müssen.

A. Allgemeine Bemerkungen.

1. Leitende Gedanken für die Gestaltung des Lehrverfahrens.

42. Der im nachstehenden Abschnitt gegebenen Einzeldarstellung meines Lehrganges liegen die folgenden Leitgedanken zugrunde.

a) Der geometrische Anschauungsunterricht ist zwar eine Vorbereitung für den höheren sog. wissenschaftlichen geometrischen Unterricht der Mittel- und Oberklassen, er ist aber auch eine selbständige Lehraufgabe der höheren Schulen. In beiderlei Hinsicht hat er es wesentlich mit der Betrachtung der Raumverhältnisse zu tun,

und wenn auch die aus ihnen abgeleiteten Gestalten der Ebene eine eingehende Sonderbetrachtung erfordern, so ist doch stets wieder zum Räumlichen zurückzukehren.

b) Als Gegenstände für die sinnliche Wahrnehmung und für die Ableitung der Grundanschauungen sind zum Beginn stoffliche Dinge zu benützen, die vom Schüler in die Hände genommen und betastet werden können (also nicht etwa vom Quaderraum des Schulzimmers ist auszugehen!), und zwar sind solche Dinge bzw. Formen zu wählen, die nicht zu einfach und einheitlich sind (also nicht Kugel!), sondern die eine gewisse Mannigfaltigkeit in der Erscheinung darbieten, ohne sofort zu vielerlei zu verlangen. Man beginnt demgemäß mit dem Würfel[1]) und schließt die Betrachtung der quadratischen Säule und des Quaders an.

c) Die zu benützenden Modelle müssen abwechselnd verschieden groß sein und aus verschiedenem Stoff bestehen, um die Form als Hauptsache hervortreten zu lassen.

d) Der Unterricht darf sich nicht an der Betrachtung der Modelle genügen lassen; alsbald und weiterhin stets ist auf die Erzeugung richtiger innerer Anschauungen hinzuwirken, und deren Verarbeitung (nicht steter Vorführung von Modellen) gilt die Haupttätigkeit.

e) Zu den unmittelbar gewonnenen Anschauungen müssen die aus der Erfahrung des täglichen Lebens ableitbaren beigezogen und mitverwendet werden, so daß der Unterricht schon in dieser Hinsicht praktischen Nutzen gewährt.

f) Der gleichen Absicht sowie der einer weiteren Veranschaulichung dienen passend anschließende Übungen im Gelände (Schulhof).

---

1) Schuster meint zwar (Nr. 106, S. 101): „die absolute Regelmäßigkeit des Würfels ist für die Auffassung mancher Unterschiedsmerkmale eher hinderlich, und außerdem eignet sich das den Schülern aus ihrem bisherigen Erfahrungskreise unter diesem Namen bekannte Spielzeug seiner Kleinheit wegen wenig zu Demonstrationen und entspricht mit seinen abgerundeten Ecken nur unvollkommen dem mathematischen Ideal“. Diese Bemerkung steht auf gleicher Höhe wie die unmittelbar vorangehende, daß das vierseitige senkrechte Prisma nicht als Ausgangskörper gewählt werden könne, weil für dieses „noch keine kurze technische Bezeichnung (Kiste?) durchgedrungen“ sei. Als ob das ein Grund sein könnte! Und als ob der Name „Quader“ nicht allbekannt wäre!

— Im Anschluß an seine oben (S. 65) schon mitgeteilte Äußerung spricht sich Walther (Nr. 130, S. 12) über die Benützung von Modellen folgendermaßen aus: „Fertige geometrische Gebilde wie Würfel u. a. dem Schüler gleich vorzuzeigen, halte ich nicht für angemessen; das unterbindet die wichtigste Tätigkeit, die Abstraktion, und führt wegen der Fremdartigkeit des Materials leicht zu jener stillen Abneigung gegen das neue Fach, die sich später so oft zu dem bekannten ‚Mangel an mathematischer Begabung‘ vertieft.“ Ich meine, daß der Abstraktion mehr zugemutet wird, wenn man den Schüler veranlaßt, seine „nächste Umgebung, das Zimmer, die Straße“ usw. als das Forschungsgebiet anzusehen und zu benützen, daß es dagegen leichter die Einführung ermöglicht, wenn er mit wirklichen, in die Hand zu nehmenden Körpern beginnt.

g) Mit dem Studium der Formen muß Hand in Hand gehen deren Nachbilden und zwar sowohl das zeichnende Nachbilden wie auch das modellierende Nachbilden durch Falten und Ausschneiden.[1]) Dieses Nachbilden bezweckt eine erfreuende Selbstbetätigung der Schüler, die Vertiefung ihres Formensinnes und -verständnisses, die Übung in und Gewöhnung an Handfertigkeit, die Geübtheit in passender Verwendung der Zeichen- und Modellierwerkzeuge.

h) Der Unterricht darf sich nicht auf die bloße Vorführung fertiger geometrischer Gestalten beschränken; aus diesen müssen durch deren Zerlegen, Zusammenfügen, Umformen neue Gestalten abgeleitet und letztere müssen selbst wieder der Betrachtung und Vergleichung unterzogen werden. Diese Übung bezweckt die entwickelnde Einführung der neuen Formen und eine möglichste Anregung der Raumphantasie bei den Schülern.

i) Dem gleichen letztgenannten Zweck dient die Aufsuchung der schon betrachteten geometrischen Gestalten in zusammengesetzteren Darbietungen gewerblicher und kunstgewerblicher Erzeugnisse, z. B. bei Ofenkacheln, Architekturteilen, Tapeten, Geweben, Glasschliffen u. dgl.

k) An das rein anschauende Betrachten und an das erzählende und nachbildende Wiedergeben der geometrischen Gestalten hat sich allmählich mehr und mehr bei passenden Gelegenheiten die Frage nach dem Warum gewisser Erscheinungen oder Gesetze anzuschließen: so werden die Schüler langsam in die freilich noch nicht gemäß euklidischer Formel, aber wohl dem Sinne nach begründende Lehre der Geometrie eingeführt, insbesondere wird ihnen die gesetzmäßige Abhängigkeit der einzelnen Stücke einer Figur von einander zum Bewußtsein gebracht — ganz wie H. Thieme sagt[2]): „Schon in der geometrischen Propädeutik, im geometrischen Anschauungsunterricht wird es eine Hauptaufgabe des Lehrers sein, in dem Schüler mit der

---

1) Der schon zweimal angeführte Walther Nr. 130 meint a. a. O.: „Nachschaffen des Angeschauten ist vom ersten Augenblick an unerläßlich; aber die Darstellungsmittel sind zunächst Finger, Hand, Arm und Bein, nicht die Zeichnung, denn diese ist schon eine höhere Stufe der Abstraktion und bietet dem Anfänger erhebliche technische Schwierigkeiten. Die Zeichenwerkzeuge sollten erst allmählich eingeführt werden ...“ Dem entgegen möchte ich sagen, daß natürlich auch Finger und Hand benützt werden sollen; aber sie allein zu benützen, entspräche doch wohl nur einem ganz jugendlichen Alter und dürfte dann so durchgeführt werden, wie dies Graßmann (s. S. 32 f.) nach Krugs Vorgang aufgewiesen hat. Und insofern das Zeichnen schon „eine höhere Stufe der Abstraktion“ ist, so dürfen wir diese erfahrungsgemäß dem Quintaner wohl zumuten. Auch das alsbaldige Verwenden der Zeichenwerkzeuge mutet dem Quintaner gewiß nicht zuviel zu.

2) H. Thieme, Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie. Beilage zum Jahresbericht des Berger-Gymnasiums und der Berger-Oberrealschule zu Posen, 1900, S. 25.

Zeit ein Bedürfnis nach Aufklärung der geometrischen Tatsachen, nach Aufdeckung des logischen Zusammenhangs derselben zu wecken." Also wohl zu merken: „mit der Zeit" und „das Bedürfnis zu wecken" (nicht ganz befriedigen zu wollen).

l) Die Hinleitung zum Fühlen der Notwendigkeit einer von der sinnlichen Wahrnehmung unabhängigen Begründung hat dadurch zu erfolgen, daß die einzelnen Maßwerkzeuge reichlich gebraucht werden, daß aber bei der Verschiedenheit der hierbei gewonnenen einzelnen Ergebnisse die Fehler festgestellt werden und daß auf die Ungenauigkeit unserer Sinne und der Werkzeuge hingewiesen wird, und mehr als das, daß diese Ungenauigkeit durch die Erfahrung stets erneut festgestellt wird.

Gemäß diesen leitenden Grundgedanken soll das nachfolgend zu kennzeichnende Verfahren eingerichtet werden.

2. Gang des Lehrverfahrens im allgemeinen.

43. Die mit den Schülern durchzuführende Betrachtung knüpft stets an ein einzelnes Körpermodell an; dieses darf aber nicht nur vor den Augen der Schüler, von ihnen entfernt, aufgestellt sein und bleiben, sondern es muß ihnen auch in die Hand gegeben werden, damit es ganz in der Nähe betrachtet, hin und her gewendet und betastet werden kann. Der Lehrer tritt dann vor die Klasse, und es werden die allgemeinen Verhältnisse der betreffenden Form in der Weise erkundet und festgelegt, daß der einzelne Schüler am vorgehaltenen Modell dessen Begrenzungsstücke (Flächen, Kanten, Ecken) zeigt und er selbst oder auch ein anderer sie nennt; es muß aber stets auch die zweite Übung vorgenommen werden, daß die einzelnen Stücke genannt und (möglichst rasch) aufgesucht und gezeigt werden. Als Übergang zur inneren Anschauung muß dann auch, nachdem irgend das gerade in Betracht kommende Stück vom Lehrer gezeigt ist, das Modell rasch vor den Augen der Schüler verborgen werden, und das gezeigte Stück ist sofort zu benennen. In stufenmäßiger Erschwerung werden dann stets auch anknüpfende Übungen vorgenommen, die das allmähliche Verzichten auf die Benützung des körperlichen Modelles bezwecken: ein Schüler oder nacheinander oder zugleich mehrere Schüler halten ihre Hände (Hefte, Finger, Federhalter) an die betreffenden Begrenzungsstücke des Modelles, und während so deren äußeren Ersatzstücke in ihrer Lage verharren, wird das Modell entfernt, und nun werden an diesem halb angedeuteten Modell die genannten Stücke gesucht und gezeigt und daran gezeigte Stücke genannt. Beträchtliche Beihilfe leisten hierbei bald die reichlich zu benützenden Drahtmodelle. Eine weitere Stufe der Ausbildung wird gewonnen, indem auch diese äußerlich andeutenden körperlichen Hilfsmittel

wegfallen: die betreffenden Körper werden durch Handbewegungen zunächst des Lehrers angedeutet, und an diesem „Luftkörper“, der bald größer, bald kleiner der Gesamtheit der Schüler vormodelliert und so gewissermaßen vor Augen gestellt wird, haben diese die vorigen reichlichen Übungen im Zeigen und Nennen und im Erfassen der Lagebeziehungen und der Formumgestaltungen durchzuführen. Die höchste und unbedingt zu erreichende Stufe für die Ausbildung der Raumauffassung wird und ist erstiegen, wenn allein die innere Anschauung der betreffenden Körperform zu den Übungen verwendet, wenn also entsprechend dem „Kopfrechnen“ auch reine „Kopfgeometrie“ getrieben wird [1]); nur zur Ergänzung und zur Nachhilfe für schlechter erfassende Schüler hat hierbei gelegentlich das Körpermodell selbst wieder einzutreten.

Ich sagte „das Körpermodell“ — es darf aber ja nicht dabei bleiben, daß für jede einzelne zu behandelnde Gestalt eben nur „das“ einzige Modell der Sammlung vorliegt und benützt wird. Im Gegenteil, die Schulsammlung muß, zumal von den anfangs zu behandelnden Körpern, eine Reihe von körperlichen Modellen besitzen, größere und kleinere, aber nicht nur solche aus Pappdeckel, sondern auch massive aus verschiedenem Stoff angefertigte und verschiedenfarbige, ebensowohl auch, wie erwähnt, Drahtmodelle; alle diese müssen aber auch in Abwechselung benützt werden. Denn nur so kann nach und nach der Geist des Schülers dahin geführt werden, selber Stoff und Farbe und (vorerst) Größe als nebensächlich herauszufinden und anzusehen und allein auf die Gestalt zu achten — daß der Lehrer ihm diese Abstraktionen vorsagt, ist doch gewiß nicht das richtige Verfahren. Wohl aber hat der Lehrer, wenn er hier unmittelbar auch nur mit ganz Elementarem beschäftigt ist, seinen Blick stets auf den tieferen wissenschaftlichen Gehalt des Geometrieunterrichtes der oberen Klassen gerichtet zu halten, und er denke oft an die trefflichen Worte, die Herbart der Behandlung elementarsten Unterrichtes gewidmet hat (1802) [2]): „Die teils systematischen, teils ästhetischen Gesetze, welche

1) Die beste Art und Weise des Betriebes, ein treffliches Mittel und ein Zwang zur Ausbildung der inneren Anschauung und ihrer Verarbeitung wäre das vom bekannten Seminardirektor Diesterweg angewandte Verfahren (Wegweiser, 5. Aufl., Bd. I, S. 7 — nach Zeissig Nr. 109, S. 19): „Drehen S' das Gas aus!“ Und nun wurden im vollständig dunkeln Zimmer die Figuren konstruiert, die Buchstaben gesetzt und die Beweise geführt. Da galt es aufzupassen, denn unvermutet erscholl der Ruf: „N. N., fahren S' fort!“ und wehe dem, der dann nicht fest im Sattel saß. Es war ein geistiges Tournieren, dem niemand gewachsen war, der den betreffenden Stoff nicht vollständig beherrschte. Hier lernte man denken, sprechen, darstellen, schließen; hier erfuhr man, was es heißt, taktfest zu sein. So wurde es klar und hell in den Köpfen, ehe der Tag zu dämmern begann. — Freilich bedarf es bei solchem Verfahren, zumal bei großen Klassen, voller Beherrschung der Zucht und Ordnung seitens des Lehrers.“

2) Herbarts Werke, Ausgabe von Kehrbach, I, 211.

die gesamte Erziehung beherrschen, müssen sich einigermaßen auch schon zum ABC der Anschauung herablassen, um demselben seine Anordnung zu geben. — Wollte man eine Rhapsodie zusammengereihter einzelner Aufgaben daraus machen, so würde es keine gesammelte Kraft, auf die man rechnen könnte, im Zögling hervorbringen. Auch ziemt es sich gerade für die der Mathematik verwandten Beschäftigungen am ersten, systematischen Geist in dem Knaben anzuregen, ihn an konsequentes und vollständig durchgeführtes Denken zu gewöhnen. ... Das ABC der Anschauung ist zwar nur der Prolog zur Mathematik, — und sie ist es eigentlich, die durch Leitung, Spannung, Bewegung, Befriedigung des spekulativen Interesses in Form eines Kunstwerks erscheinen sollte. Aber dazu hat schon der kleine Prolog das seinige vorzurüsten. Er für sich sey klar, sinnlich, rund; aber vor allen Dingen zeige er von dem Kleinen auf das Große, mache allenthalben die Nähe der großen Wissenschaft fühlbar, spende manchmal kleine Gabe in ihrem Namen, lasse durch ihre unsichtbare Hand hie und da einen Knoten lösen, einen Fehler berichtigen, — aber auch durch ihre Allwissenheit Fehler ans Licht treten, welche alsdann die Zeichnungen, die Instrumente, die unvollkommenen Rechnungen bekennen müssen. Misverstand und Achtlosigkeit dürfen vollends gar nicht hoffen, ungeahndet durchzuschleichen."

Die im vorangehenden kurz gekennzeichnete Art des im engeren Sinn lehrhaften Teiles des Unterrichtsbetriebes macht es freilich unbedingt wünschenswert, ja notwendig, daß der Lehrer möglichst körperliche und geistige Regsamkeit besitze und entwickle — die erstere, um still und rasch jeweils, wenn nötig, das Modell vor den Augen der Schüler verschwinden zu machen und es, wenn erwünscht, rasch wieder hervorzuholen, zugleich um sozusagen überall die Augen zu haben und jeden einzelnen Schüler heranzuholen; aber auch die letztere sei ihm eigen, um durch rasches, Schlag auf Schlag folgendes Fragen und Vorzeigen und Aufrufen die so notwendige erfrischende Rührigkeit und innere Teilnahme der Jugend zu erzielen und zu erhalten. Freilich, auch zu lange darf die hierbei erforderliche Spannung und in gewissem Sinn Erregung der jugendlichen Schüler nicht verlangt werden, und sie soll auch nicht aufrecht erhalten werden; das Zwischeneintreten des Zeichnens und, wie nachher noch zu sagen sein wird, das Abwechseln mit Rechnen wird und muß Erholung bringen. Ein wesentliches Hilfsmittel der Frischerhaltung ist die eigene Frische und Heiterkeit und ein gelegentlicher Spaß des Lehrers; Ernst allein und Würde tun es nicht — das lebendige frische Teilnehmen am geistigen Leben der Jugend erweckt auch bei ihr rege Teilnahme.

44. Es mag sich wohl empfehlen, an zwei ausgeführten Beispielen die im Sinn der vorangehenden Bemerkungen wünschens-

werte Art der Einzelbehandlung aufzuzeigen und dabei auch den, wie ich manchmal beobachten konnte, leider oft nur rein oder vorwiegend äußerlichen Betrieb zu kennzeichnen und abzuweisen.

Erstes Beispiel.

Es sei der Würfel gewählt als erste zu behandelnde Körperform. Häufig genug besteht die ganze „Anschauung“ und die darauf gegründete „Beschreibung“ dieses Körpers in der Feststellung der folgenden Tatsachen [1]): „Der Würfel ist begrenzt von 6 Flächen, 12 Kanten und 8 Ecken. Die 12 Kanten sind alle gleichlang; die 6 Flächen, die auch unter einander gleich sind, heißen Quadrate.“ Also fertig? abgemacht? — Nein; denn es werden auch noch aus der nächsten Umgebung des Schülers drei Beispiele für das Vorkommen des Würfels und fünf Beispiele für das Auftreten des Quadrates namhaft gemacht und im Druck festgehalten. Also, lieber Schüler, lerne jene Beschreibung und diese Beispiele nur schön auswendig, wiederhole sie beide fleißig im Buch, falls sie dir entschwunden sind — dann kann dir's in der Abhörprüfung gewiß nicht schlecht ergehen! Und wenn du gar auch noch die Weisheit vorzubringen vermagst, daß $6 + 8 = 12 + 2$, oder noch mehr, daß ein gewisser Euler gefunden habe, es gelte stets $e + f = k + 2$ als bezügliche Gleichung, dann kannst du dich als wohl unterrichtetes und wissensreiches Kind sehen lassen.

Also so gewiß nicht! Denn zunächst diese an nur einem Beispiel oder meinethalben auch an dreien gewonnene Gleichheitsbeziehung ist dem Jungen gewiß herzlich gleichgültig, sie ist nur eine von außen an ihn herangebrachte, für ihn zunächst unerkennbare und auch als Wissen vorerst unbrauchbare, also unnötige Tatsache. Es kann auch für den 10jährigen Jungen oder gar für das gleichalte Mädchen, deren beider Einbildungskraft so lebhaft tätig ist und die nach Beschäftigung sucht, kaum etwas Langweiligeres und für den eigentlichen geometrischen Unterricht kaum etwas Unnötigeres geben als für den Würfel nahezu allein die Feststellung der Zahlen 6, 8, 12. Und hat nicht die geistige Mitarbeit des Schülers und die erste Betätigung seiner mitarbeitenden Phantasie und der Erweis seines Verständnisses für die Frage gerade darin zu bestehen, daß er selbst aus seiner Erfahrung heraus und stets wieder erneut, wenn es verlangt wird, Beispiele sucht und angibt! Wozu also derartige Beispiele drucken lassen! Wohl gar für den Lehrer? Und hat nicht der Schüler in gleichem Sinn und zu gleichem Zweck in vorgeführten Raum- und Flächenmustern (Ofenkacheln, Tapeten u. dgl.) das Vorkommen von Würfeln und Quadraten selber herauszufinden? Wie kann, wie soll

1) Meine Anführung ist wörtlich einem gedruckten Leitfaden entnommen.

ihm hier das Buch helfen? — Nein, in solch dürftiger Aufzählung von ein paar Zahlen bei ständig vorgehaltenem Modell und im Vor- oder Nachsagen von ein paar Beispielen darf das Wesen und der geistige Gewinn einer geometrischen Anschauungslehre nicht bestehen! Gegründet freilich auf unmittelbare Anschauung der Modelle und dann, ohne solche, in sorgsamer Pflege der inneren Anschauung muß die Größe und gegenseitige Lage der Flächen des Würfels, die Lage und Beziehung der Kanten und der Ecken zueinander und zu den Flächen erkundet, aufgefaßt, durchgedacht und dann am sog. Luftwürfel (vgl. S. 113) vormodelliert, wie auch bei geschlossenen Augen (noch besser wäre im Dunkeln!) besprochen werden derart, daß nicht bloß die Fragewörter Wer? Wie? Wo?, sondern auch das aufklärende Warum? verwandt werden. Die reiche Fülle von hierbei möglichen und nötigen Fragen ist weiterhin (§ 46) angedeutet. Solches Durcharbeiten im regen, mannigfaltigen Frage- und Antwortspiel muß in anregender Abwechslung solange geübt werden, nicht bloß bis die Raumform des Würfels selbst als solche erfaßt und zu einem guten Bekannten geworden ist, sondern solange, bis über diese Vorstufe hinaus mit und an der Behandlung des Würfels die damit mögliche vielseitige Ausbildung der Formenvorstellung und des Raumsinnes erzielt ist. Nicht der Würfel an sich, und was er ist und wie er ist, darf als Hauptsache gelten, auf die sich die Arbeit von Lehrer und Schülern zu erstrecken hat, sondern was man an ihm sehen und über ihn denken kann, also die möglichste geistige Ausbildung und Durchbildung der Schüler, darin liegt das Wesen der Sache.

Und mit der Betrachtung des unversehrten Würfels ist noch gar nicht alles erledigt: das Studium seiner Natur und damit das der Natur überhaupt erfordert das Zerschneiden des Körpers mittels seiner Mittelebenen, nämlich sowohl mittels der parallel mit den Seitenflächen legbaren als auch der durch zwei Gegenkanten gehenden, und erst das ja nicht zu versäumende Anlegen je einer so entstandenen Würfelhälfte an einen ebenen Spiegel gewährt dem Schüler deutlich genug die „Anschauung" der Symmetrie oder Spiegelgleichheit. Daß der Würfel auch Achsen besitzt, schließt sich leicht an.

Selbstverständlich ist es, daß die durch die Sinne gewonnenen und vom geistigen Auge erfaßten ebenen und körperlichen Raumgebilde nachträglich auch für das körperliche Auge durch Zeichnen und Modellieren nachgebildet werden.

Die bezügliche Einzelausführung folgt weiterhin in § 46.

Zweites Beispiel.

Der Unterricht sei bis zur Betrachtung des Rechteckes gelangt. Auch hierbei kann, wie bei der Betrachtung des Würfels, ziemlich rasch, ja sehr rasch das Wesentlichste „abgemacht" werden, wenn es

sich nur um die „Beschreibung" der Figur handelt: 4 Ecken, 4 Seiten, je paarweis gleich, 4 rechte Winkel, vielleicht noch Gleichheit der 2 Eckenlinien, dazu die Zeichnung — fertig, weiter!

In der Tat, so ist vielleicht dieses neue geometrische Gebilde erledigt, aber nur scheinbar; bei solcher Beschränkung auf die tote Form ist und bleibt das Gebilde tot und kann als Leiche dem jungen Menschen nur wenig Teilnahme abgewinnen. Nein, diese neue Figur muß gewissermaßen lebendig werden, und das kann sie nur werden durch das, was der Geist des Menschen hineinlegt oder aus ihr herausfindet; und die Einbildungs- und Gestaltungskraft auch des jungen Menschen, richtig angeleitet, vermag manches zu finden, was nicht an der Oberfläche liegt, sich nicht dem Auge aufdrängt und nicht unmittelbar erkennbar ist. Mit jener rein äußerlichen Betrachtung ist schon das Rechteck selbst noch nicht studiert, noch viel weniger ist das herausgearbeitet, was hier für die Pflege der Raumauffassung und überhaupt für des Schülers Geistesbildung ableitbar ist und was durch dessen Selbsterarbeitung gewonnen werden kann und muß; bleibt es bei jener knappen Aufzählung, so hat man jene viel geschmähte und verspottete öde „Formenlehre", das Schreckbild mancher Jugenderinnerung.

Mit dem Lehrer hat der Schüler zu suchen. Er hat sein Rechteck gezeichnet, er schneidet es dann in beiderseitig verschiedenfarbigem oder verschieden bezeichnetem Papier aus und legt es auf die schwarze Bank, von der alles Störende entfernt ist. Nun wird die Verbindungsstrecke zweier Gegenseitenmitten gezogen und längs ihr durchgeschnitten; der Versuch, den einen Teil durch Umwenden mit dem anderen zur Deckung zu bringen, gelingt, und auch die Möglichkeit einer weiteren, andersartigen Deckung wird gefunden durch halbe Umdrehung um den Mittelpunkt jener Strecke, nicht minder auch die Deckung durch Verschiebung. Daß hierbei auch der Spiegel wieder einzutreten hat, ist selbstverständlich, und ebenso, daß die zwei verschiedenen Farben auf Vorder- und Rückseite des bewegten Stückes beachtet werden müssen. Es dient weiter sehr zur Anregung, wenn nun aus dem Erfahrungsgebiet der Schüler mittels Spiegelbenützung Beispiele gesucht werden, die ebenfalls die Deckungsfähigkeit der zwei Teile zulassen oder nicht zulassen (Gestalt der Ziffern 8 und 9, des Buchstabens W, P oder R, des rechten Handschuhs).

Ein zweites Mal hat der Schüler sein Rechteck gezeichnet und ausgeschnitten, und jetzt wird es längs einer Eckenlinie durchgeschnitten. Das Benützen- und Verwertenwollen dieser Eckenlinie als Achse zeigt die Unmöglichkeit einer durch einfaches Umwenden herzustellenden Deckung beider Teilstücke, somit das Ausfallen der Eckenlinie als Achse, und bei Rückkehr zur entsprechenden

Betrachtung des Quadrates unter Benützung des Spiegels kann auch das Warum der Erscheinung aufgeklärt werden. Von selbst kommen nun die Schüler darauf, daß dagegen der weitere Versuch, durch halbes Umdrehen die Deckung zu bewerkstelligen, wohl gelingt.

So können und sollten schon im ersten Anfangsunterricht nicht nur Formen, sondern auch Lagen und Lagebeziehungen studiert werden; mit großer Freude und Teilnahme werden solche Betrachtungen angestellt, gewissermaßen Entdeckungen oder Erfindungen gemacht. Man beachte zugleich, daß hier spielend die verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten (Verschieben, Drehen, Umwenden) verwertet und, wenn auch natürlich ohne Definitionen, zur Kenntnis der Schüler gebracht werden; so halten in deren mathematisches Geistesleben, ihnen selbst noch unbewußt, die Theorien und Beweisgedanken des späteren geometrischen Unterrichtes ihren Einzug.

Aber nicht nur, wie hier geschehen, sollen und dürfen fertige Formen der Betrachtung und Vergleichung unterzogen werden; es ist höchst erwünscht, ja dringendes Bedürfnis, durch den Schüler selbst, vor seinen Augen, durch seine Mithilfe neue Gestalten entstehen zu lassen, und zwar dies zur Ebnung des Weges fürs Weiterschreiten, ferner zur Weckung tieferen Verständnisses der Formen und ihrer Beziehungen, nicht zum letzten behufs Verlebendigung der Anteilnahme seitens der Schüler — sind sie doch bei solchem Tun gewissermaßen schöpferisch tätig.

Die vorhin aus dem Rechteck durch Zerschneiden längs der Eckenlinien gewonnenen Teilstücke werden zunächst wieder in ihre Entstehungslage gebracht, und in dieser wird jedes der Stücke auf der Oberseite etwa mit O, auf der Unterseite mit U bezeichnet (wenn nicht schon verschiedene Farben das Oben und Unten unterscheiden lassen). Durch Erfragen wird festgestellt, daß die Teilstücke (Dreiecke) jetzt mit ihren längsten Seiten aneinander liegen. Wäre es wohl auch möglich, sie je mit ihren mittelgroßen oder mit ihren kleinsten Seiten aneinander zu legen, während natürlich zunächst noch die bisherigen Oberseiten der beiden Teilstücke Oberseiten bleiben? Und wenn es möglich, und da es gelingt, welche neuen Gestalten treten hierbei auf? Wenn hier freilich noch kein Beweis für die Parallelität der entstehenden Vierecksgegenseiten geführt werden soll [— obwohl dies für diese Stufe wohl deutlich zu machen wäre, da ja die anschauliche Lehre von den Parallelgeraden bereits behandelt sein kann —], so empfindet der Schüler doch sofort das Parallelsein; und daß er selbst nun das Parallelogramm hat entstehen machen, gewährt ihm Freude, nicht minder Freude und Anregung, daß sich so nacheinander zwei ganz verschieden aussehende Parallelogramme herausbilden. Warum gibt es denn beim Quadrat, wenn hier nachträglich dieselben entsprechenden Schiebungen vorgenommen

werden, warum gibt es hier nicht auch zwei verschiedene Parallelogrammformen? (Vgl. Fig. 48 u. 49 auf S. 150.)

Und nun weiter im Forschen und Finden: wenn bei der Anfangslage des Rechtecks dessen eines Teilstück zuerst im Raum umgedreht und die bisherige Oberseite nun Unterseite geworden, und wenn jetzt wiederum die beiden Teilstücke nacheinander je mit den größten, mit den mittelgroßen, mit den kleinsten Seiten aneinander gelegt werden, was entsteht jetzt? werden, müssen zwei gleichartige Seiten der zwei übrigen Seitenpaare in gerader Linie liegen? Mit Freude und mit lebhaftester Anteilnahme sieht er vor seinen Augen, durch sein eigenes Tun die Gestalten des Deltoides und der zwei verschieden gestalteten gleichschenkligen Dreiecke entstehen (vgl. die späteren bezüglichen Figuren) — es entstehen neue Grundfiguren, bereit, näher betrachtet zu werden, und die, wenn die Reihe an sie kommt, nicht durch die Kunst oder auf Befehl des Lehrers herbei- und in den Unterricht hineingezaubert zu werden brauchen, da sie dann im Bewußtsein des Schülers ja schon bereit liegen.

Auf diese oder ähnliche Weise hat der geschickt geleitete Unterricht aus der Arbeit des Schülers selbst die neuen Gestalten hervorgehen zu lassen; und da dieser sie sozusagen selbst geschaffen und darnach gezeichnet hat, sind sie sein gewiß unverlierbares Eigentum geworden, und sein Geist hat sich neu in Beweglichkeit geübt. Zugleich hat der Unterricht die Möglichkeit, neuen Stoff in Menge beizuschaffen, Bausteine fürs folgende zu liefern, die schon ganz oder teilweise behauen sind und die der Lehrer zusammen mit seinen lerneifrigen Schülern nur sinnig zu betrachten, zu vergleichen, aneinanderzufügen hat, um zu immer neuen Gestaltungen mit ihren Beziehungen, bald auch Gesetzen weiterzuschreiten.

3. Werkzeuge und Hilfsmittel beim Unterricht.

45. Ein wesentlicher Bestandteil beim Betrieb der Raumlehre in den unteren Klassen sind die fortgesetzten nebenherlaufenden Übungen im Zeichnen und Modellieren, die zugleich als wünschenswerte Übungen in der Handfertigkeit aufzufassen sind und bekanntlich sehr gerne von den Schülern ausgeführt werden. Über die Art und den Umfang dieser Übungen wird nachher je bei den einzelnen Abschnitten das Nötige gesagt werden; hier sollen nur noch die dafür nötigen Werkzeuge und Hilfsmittel aufgezählt und kurz besprochen werden.

Als Maßstab (M.) und zugleich als Lineal (L.) dient am besten ein 20 cm-Maßstab, der (zur Schonung der Augen und weil so durchweg ausreichend) nur in ganze Millimeter geteilt und nicht beiderseits abgeschrägt ist, sondern nur einerseits längs der Teilung, während andererseits die volle Dicke des Holzes (etwa 3 mm)

erhalten ist, so daß diese Seite als Lineal dienen kann zum Anlegen des Winkelscheites. — Das Lineal ist stets in einer (vom Schüler anzufertigenden) Hülle aus Papier oder Stoff zu verwahren.

Das Winkelscheit (Wsch.) ist am besten ungleichschenklig zu wählen (also mit Winkeln von 30°, 60°, 90°) und nicht gar groß, die Hypotenuse etwa 12 bis 15 cm lang. — Auch das Winkelscheit ist stets in besonderer Hülle zu verwahren.

Ein Winkelmesser (Wm.) aus Papier ist voll ausreichend; der Halbmesser seines äußeren Bogens mag etwa 6 cm groß sein.

Als Zirkel (Z.) kann der Bequemlichkeit wegen und um das Gewicht der vom Schüler in die Schule mitzubringenden Dinge herabzumindern, anfangs ein kleiner an das Bleistift anzufügender Stellzirkel (etwa nach Soennecken) gebraucht werden; später wird man ein vielleicht nur kleines, aber jedenfalls gutes Reißzeug anschaffen lassen.

Auch eine kleine Schere, am besten mit abgerundeten Enden, ist ein für jeden Schüler notwendiges Erfordernis; auch diese Schere soll stets in einer jede unabsichtliche Verletzung ausschließenden Hülle verwahrt werden.

Zur Übertragung von Strecken empfiehlt sich (zeitlich vor Benützung des Maßstabes) die Verwendung von steifen Papierstreifen (Pstr.); zur annähernden Modellierung, Ausmessung und Übertragung von Winkeln u. dgl. haben die Schüler stets einige Blättchen halbsteifes Papier bereit zu halten.

An Bleistiften sollte stets die übliche Nr. 2 (weich) und Nr. 3 (mittelhart) vorrätig sein. Empfehlenswert, ja oft genug unumgänglich nötig ist die Verwendung von verschiedenfarbigen Bleistiften.

Als Zeichenheft wird ein gewöhnliches unliniiertes Schulheft benützt, womöglich ein solches mit etwas kräftigem (aber nicht steifem) Papier. Stets ist darauf zu halten, daß das gerade zum Zeichnen benutzte Blatt durch ein loses (aber durch längeren Faden mit dem Heft verbundenes) steiferes Papier unterlegt wird, um das Durchdrücken der Figuren beim Zeichnen zu vermeiden. — Zeichnen auf nur je einer Seite des Papiers im Heft, also Leerlassen der Rückseite ist nicht nötig, ja im Interesse richtigen Zeichnes auf der einzelnen Seite und wegen erleichterter bequemer Übersicht über den ganzen Inhalt nicht einmal empfehlenswert.

Beim Gebrauch des Zeichenheftes ist anfangs kurz anzugeben, weiterhin nach kurzer Beratung mit den Schülern festzustellen, wie auf der Blattseite die einzelnen Figuren zu verteilen sind, damit diese für sich deutlich genug hervortreten, auch die etwa beizuschreibenden Maße oder Angaben gut beigefügt werden können und damit so das Ganze einen gefälligen Eindruck erwecke. Öfters wird der Lehrer

auch die Lage eines Ausgangspunktes einer Figur koordinatenmäßig dadurch angeben und wird sie von allen Schülern auf Befehl zeichnen lassen, daß der Abstand jenes Punktes vom oberen (unteren) und vom linken (rechten) Rand der Heftseite mitgeteilt wird. Daß sich schön hierzu der Lehrer selbst sein Schülerheft als Vorbereitung gezeichnet haben muß, ist selbstverständlich, aber auch aus sonstigen naheliegenden Gründen sehr erwünscht.

Zur Anfertigung von Flächen- und Körpermodellen sind die nötigen Modellierungen i. a. an Papier vorzunehmen, da plastisches Arbeiten im Massenbetrieb der Schule bei den üblichen Verhältnissen nicht wohl durchführbar ist. Die Schüler haben im Unterricht, zum Teil auch als Hausaufgabe die betreffenden Figuren genau (meist nach Maßangabe!) zu zeichnen, dann auszuschneiden und im Unterricht (zur Neugestaltung von Formen usw.) zu verwerten; nach dem Gebrauch sind die Papiermuster in passendem Umschlag aufzubewahren und später wieder gelegentlich zur Schule mitzubringen. Einige der Körpernetze werden wohl auch zusammengeklebt; hierzu werden rechtzeitig die nötigen Angaben über Durchschneiden und Ritzen von Linien gemacht, sowie solche über das passendste Anordnen und das Stehenlassen von Ansatzläppchen behufs Festklebens.

In wenigen Fällen habe ich in die vorliegende Schrift auch (— nach dem Vorgang und Rat der beiden Young, Nr. 134 —) eine Anleitung zum Anfertigen räumlicher Modelle ohne Kleben, allein durch Papierfalten aufgenommen; mehr zu geben ist wohl privater häuslicher Unterricht imstande, aber wiederum nicht der Massenbetrieb bei großen Klassen.

Auch über die Benützung von hölzernen Flachmodellen ist noch ein Wort zu sagen. Die Schüler können und sollen nicht stets ihre selbstgefertigten Flachmodelle aus Papier vorrätig haben; auch sind diese ja nur im kleinen Maßstabe angefertigt zu Nutz und Frommen des einzelnen Verfertigers und sind leicht biegsam und deshalb unhandlich. Um bei Wiederholungen, Übersichten, Verwandlungen, Neubildung von Figuren u. dgl. der ganzen Klasse das Betreffende klarzumachen, bedarf der Lehrer größerer, steifer, handlicher (also aus dünnen Holzplatten gefertigter) Modelle. Solche sollte jede Schule in genügender Zahl besitzen, so angefertigt, daß deren einzelnen Teilstücke nicht erst mühsam und unter Zeitvergeudung zusammengesucht werden müssen, sondern so, daß etwaige Teilstücke, soweit möglich oder empfehlenswert, durch Scharniere miteinander verbunden sind.[1]) — Ausdrücklich sei aber hervorgehoben, daß diese Modelle

1) Auf Grund langer Erfahrung habe ich solche hölzernen Flachmodelle, aber auch eine Reihe anderer für den geometrischen Anschauungsunterricht sehr wohl brauchbarer Modelle anfertigen lassen und habe sie im Verlag von B. G. Teubner veröffentlicht [als erste Gruppe der von Prof. Dr. H. Wiener

durchaus nicht die von den Schülern selbstgefertigten voll ersetzen dürfen; stets sind die betreffenden Übungen von jedem Schüler zuerst an seinem eigenen einzelnen Modell vorzunehmen, und nur zur Verdeutlichung oder zur zusammenfassenden Wiederholung mögen die großen Modelle der Schule benutzt werden.

Und was der Lehrer noch weiter nötig hat, was also die Schulsammlung besitzen muß, ist ein ebener Spiegel, durch dessen Benützung die Symmetrie oder Spiegelgleichheit rascher und gründlicher deutlich gemacht wird als durch bloßes Zeichnen; letzteres muß freilich auch geübt werden. Für unseren Zweck ist es ratsam, daß die eine Kante des Spiegels rahmenfrei bleibt, um ohne Störung auf den Tisch gesetzt werden zu können.

Wegen der Verwendung einer Schalenwage vgl. weiter unten.

Zum Schluß sei noch beigefügt, daß die Benützung eines Lehrbuches bei diesem Unterricht nicht angezeigt ist, ja rundweg verboten sein sollte — handelt es sich doch nicht um Dinge, die auswendig gelernt oder gemäß dem gedruckten Buch wiederholt und abgehört werden können oder sollen, sondern um persönlichste Erfahrungen, gleichsam Entdeckungen des Schülers, deren Tatsachen und Ergebnisse in hundert-, ja tausendfältiger Wiederholung sich von selbst einprägen — tun sie das nicht, so sind sie nicht richtig gewonnen. Kurz, hier ist das Buch vom Übel.

B. Einzelausführungen für den Unterrichtsgang.

I. Körper und aus ihnen abgeleitete Gebilde.

46. Der Würfel.

1. Es werden Würfel zum Spielen (mit Augen) vorgezeigt. Was sind das? Woher haben sie wohl ihren Namen? — Wir wollen einen solchen Körper betrachten, aber größer und scharf ausgebildet. Hier ist ein solcher.

Aufstellung. — Stelle diesen Körper (1 cdm) in verschiedener Weise hier auf den Tisch! Du auch in anderer Weise! Auf wieviele Arten kann man ihn wohl aufstellen? — Muß ein solche Körperform aus steifem Papier geformt sein? Wer kennt andere „Würfel" (und Würfelformen)?

2. **Flächen.** — Lege die Hand auf die eine Fläche des (frei gehaltenen) Würfels! Du die deine auf eine andere Fläche! [Warum nennt man wohl eine solche Grenze eines Würfels eine „Fläche"?]

---

an der Technischen Hochschule in Darmstadt herausgegebenen „Mathematischen Modelle"]. Vgl. das Preisverzeichnis, das unentgeltlich von der Firma Teubner zu beziehen ist.

Hier habe ich zum Unterschied eine Kugel. Ist bei dieser die Außenfläche auch so eben wie beim Würfel? Wenn man ein Buch auflegt auf die Kugel, liegt es dann auch so vollständig auf wie es beim Auflegen auf die Würfelfläche der Fall ist? Die Fläche der Kugel heißt krumm, die des Würfels heißt eben. Gib noch andere ebene Flächen an, solche hier im Zimmer und solche draußen!

Stelle jetzt den Würfel mit einer Fläche auf den Tisch; lasse die Fläche auf dem Tisch und drehe ihn so, daß eine andere Fläche (dir und) der Klasse zugewendet ist! Diese Stellung soll künftighin die Grundstellung heißen; in ihr wird der Körper stets betrachtet, wenn nicht anders bestimmt wird.

Lege du die Hand auf die obere Fläche, du auf die rechte Fläche, ...! Also wieviel Flächen sind es im ganzen? Wie heißt diese Fläche, die ich hier zeige? Diese? ...?

Lege du die eine Hand auf die linke, die andere auf die rechte Fläche und lasse die Hände in dieser Haltung; ich ziehe nun den Würfel weg, wie stehen die Hände? Stehen hier im Zimmer auch zwei Wände so? Zeige andere zwei Flächen hier im Zimmer, die ebenso stehen; nenne auch solche draußen auf der Straße! Zwei so stehende Flächen nennt man gleichlaufende oder parallele Flächen.

Lege nun du die eine Hand auf die obere und die andere auf die untere Fläche usw. (wie vorhin), ebenso bei der vorderen und hinteren Fläche. Also wieviele Paare paralleler Flächen hat der Würfel? Nun entferne ich den Würfel; lege aber du trotzdem die Hände auf die gedachte linke und rechte Fläche, du ebenso auf die obere und untere, du, dritter, auf die vordere und die hintere Fläche: ihr drei mit euren sechs Händen schneidet so aus der Luft einen Würfel aus, d. h. ihr modelliert einen „Luftwürfel“.

Modelliere jetzt du allein einen größeren Luftwürfel, du einen kleineren! Nun modelliere ich einen Luftwürfel, und du legst die Hand auf seine obere Fläche, du auf seine hintere, ...! Lege jetzt du deine zwei Hände zugleich auf ein Paar paralleler Flächen meines Luftwürfels, du auf ein zweites Paar bei einem größer gedachten, du auf das dritte Paar bei einem kleineren Luftwürfel!

3. **Kanten.** — Zeige eine Tischkante, eine Kante an der Bank, am Buch! Fahre mit dem Finger einer Kante des Würfels nach! Bringe diesen in die Grundstellung und fahre du entlang einer oberen Kante, du entlang einer anderen oberen Kante! Wieviel obere Kanten gibt es? wieviele untere? rechte? ...? Also jedesmal 4; wievielmal 4? Sind es also zusammen $6 \cdot 4 = 24$ Kanten? Warum nicht soviele? warum hat man am Würfel nur zwölf Kanten zu zählen?

Nun zeige du an diesem Drahtwürfel eine vordere Kante! du eine andere vordere Kante! Wie wird man diese beiden vorderen Kanten zur Unterscheidung benennen? — Zeige du hier am Würfel

die vordere rechte Kante, die hintere linke, die rechte untere, . . ., (die vordere hintere)! Wieviele Angaben braucht man zur Benennung einer bestimmten Kante? (einer bestimmten Fläche? z. B.?)

An diesem kleineren Würfel (von Holz oder Eisen) zeige ich diese Kante hier (und verstecke rasch den Würfel); wie heißt sie? Wie heißt diese? und welches war diese? (Stets wird der Würfel nach Vorzeigen rasch versteckt!)

Modelliere du einen Luftwürfel; wie heißt diese Kante? diese? . . . Zeige an deinem Luftwürfel die linke obere Kante, die vordere rechte, . . ., (die obere untere), . . .!

Stelle du dir einen Würfel vor (— die Modelle sind entfernt —): welche Kanten begrenzen die vordere Fläche? Umfahre sie in der Luft! [Bestätige du, was er gezeigt, an diesem Drahtwürfel, an diesem Blechgefäß!] Welche Kanten begrenzen die obere Fläche? . . .? Die linke hintere Kante begrenzt zum Teil welche Fläche? welche noch? Welche zwei Flächen begrenzt zum Teil die obere rechte Kante? . . .?

Zeige mir jetzt an diesem Papiermodell die Kanten, die von oben nach unten ziehen — wieviele sind es? Zeige du an diesem Drahtmodell die von vorn nach hinten laufenden Kanten — wieviele sind es? Zeige am Luftmodell die von links nach rechts ziehenden Kanten — wieviele? Wie haben wir je zwei solche Flächen wie die obere und die untere, die vordere und die hintere Fläche, . . . genannt? Wie nennt man also wohl jene je vier Kanten? Zeige mir am körperlichen Würfel miteinander gleichlaufende oder parallele Kanten! Ebenso auch am Luftwürfel! Zeige auch im Zimmer, an einem Buch parallele Kanten!

Wieviele Kanten sind am Würfel jedesmal parallel? Wieviele Gruppen paralleler Kanten gibt es also?

Zeige (nenne) am (ohne) Modell zwei Kanten, die nicht miteinander parallel sind! Lege du nun auf die linke Würfelfläche die linke Hand und lege diesen Bleistift an die rechte obere Kante und halte Hand und Bleistift fest, während ich den W. entferne: was wird man wohl von der Lage von Handfläche und Bleistift, von linker Würfelfläche und rechter oberer Kante sagen? Gibt es noch andere mit der linken Fläche parallele Kanten? Welche und wieviele Kanten sind parallel der unteren Fläche? der hinteren Fläche? . . .?

Ich zeige die vordere linke Kante des Würfels; zeige du jetzt eine Fläche parallel mit dieser Kante! Zeige dieselbe Art von Lage mit Handfläche und Bleistift! Zeige die Flächen, die parallel sind mit der vorderen oberen Kante, mit der unteren rechten Kante! Entsprechend am Luftwürfel.

Stellt euch einen W. vor, wir modellieren ihn nicht: welche Kanten sind parallel (mit) der oberen Fläche? mit der hinteren Fläche? . . .? Welche Flächen sind parallel zur vorderen linken Kante? zur vorderen hinteren (!) Kante? zur hinteren oberen Kante?

Mit einer Kante sind am W. stets wieviele Kanten parallel? Beispiele! — Mit einer Kante sind wieviele Flächen parallel? Beispiele!

Nenne (zeige) eine Kante und eine Fläche, die nicht miteinander parallel sind!

Mit einer Fläche sind am W. wieviele Flächen parallel? Mit einer Fläche sind wieviele Kanten parallel? Beispiele! — Zeige hier im Zimmer dasselbe!

4. **Zeichne** die vordere obere Kante des W. in der Luft nach, dann zeichne sie ab an die Tafel! Zeichne du die vordere rechte Kante für sich an die Tafel! — Wird wohl so die Zeichnung „aus freier Hand" oder „nach Augenmaß" (n. A.) genau? Warum nicht? Wie könnte (müßte) man die Zeichnung genauer machen?

Faltet ein Papier einmal und bildet so eine Gerade; dann prüfet mit ihr (an ihr) die Würfelkante, ob sie gerade ist! Wie? — Gespannte Schnur und deren Verwendung zum Prüfen des Geradseins. — Vorzeigen und Benützen des Lineales aus Holz. (Jeder Schüler muß von jetzt ab ein kleines Flachlineal bei sich haben.)[1])

Zeichne eine gerade Linie (s. Schülerheft im Anhang[2]) Fig. 1 = H. 1). Kann man eine Gerade in ihrer vollen Erstreckung zeichnen? Warum nicht? — Zeige am W. eine (2teilig, 3teilig) gebrochene Linie, dann zeichne je eine solche (H. 2)! — Zeichne eine krumme Linie (H. 3), du noch eine andere! Wieviele Arten von krummen Linien gibt es wohl? Wer weiß verschiedene Arten von schönen (regelmäßig geformten) krummen Linien anzugeben? (Drahtmodelle von solchen sind vorzuzeigen!) Wo kommen solche vor?

Wieviele Arten von Geraden gibt es?

5. **Wagrechte, lotrechte und schiefe Geraden.** — Aufstellen einer Wage und Herstellen der Gleichgewichtslage des Wagbalkens = wagrechte Gerade! (Aufstellen eines Gefäßes mit Wasser und darauf Schwimmenlassen eines Holzstabes; dann Neigen und Schiefhalten des Gefäßes.) — Zeige am W. in Grundstellung eine wagrechte Kante, noch eine! Wieviele gibt es? — Nenne (ohne Modell) die wagrechten Kanten von links nach rechts! die von hinten nach vorn! — Zeichne n. A., dann mit Lineal (m. L.) eine wagrechte Gerade (H. 4), mehrere wagrechte Geraden (H. 5)! — Aufsuchen von

---

1) Betreffs seiner Form und Anschaffung vgl. S. 119f.

2) Weiterhin sollen die Figuren des Schülerheftes durch H mit beigefügter Nummer kurz bezeichnet werden.

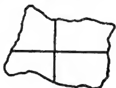
Beispielen hier im Zimmer und draußen! Welche Lage haben wohl mehrere wagrechte Geraden?

Herrichten eines Bleilotes (oder Steinlotes) und sein Gebrauch = lotrechte Gerade! Nenne lotrechte Geraden am W. in dessen Grundstellung! wieviele sind es? — Aufsuchen von Beispielen lotrechter Geraden im Zimmer und draußen! — Zeichne eine lotrechte Gerade, dann mehrere solche (H. 6)! Welche Lage haben wohl mehrere lotrechte Geraden?

Zeichne nun auch schräge oder schiefe Geraden und zwar eine (mehrere) von links oben nach rechts unten (H. 7), dann auch eine (mehrere) von unten links nach oben rechts (H. 7)!

6. a) **Parallele Geraden.** — Zeige an der Bank, am Fenster, ... zwei parallele Geraden! Wo kommen bei der Eisenbahn, an einem Leiterwagen, hier an dieser Tapete, ... parallele Geraden vor? Fahre mit zwei Zeigfingern zwei parallelen Geraden in der Luft nach, die wagrecht sind (die lotrecht sind, die von vorn nach hinten ziehen, ..., die von links unten nach rechts oben laufen)!

b) **Zueinander senkrechte Geraden.** — Nimm ein Stückchen Papier, falte es und dann falte es nochmals so, daß die Teile der


Fig. 6.

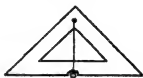
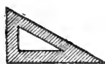

Fig. 7.


Fig. 8.

ersten Faltlinie einander decken, dann breite wieder aus (Fig. 6): so erhält man zwei zueinander senkrechte Geraden. — Vorzeigen der Setzwage (Fig. 7), des Richtscheites (Fig. 8) und des Winkelscheites (Fig. 9a u. b). Deren Verwendung; ferner Prüfung, ob ihre Geraden senkrecht zueinander sind (H. 8 — mit. Rücksicht auf Fig. 6).


a

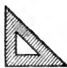

b

Fig. 9.

Zeige am Würfel die vordere untere Kante und eine auf ihr senkrechte Kante (noch eine zweite auf ihr senkrechte Kante)!

Stelle dir die vordere rechte Kante des Würfels vor; welche Kante z. B. steht darauf senkrecht? noch eine? Wieviele Kanten stehen je auf einer Würfelkante an derselben Stelle zu ihr senkrecht? wieviele stehen überhaupt zu ihr senkrecht? Gelten die letzten Aussagen auch noch, wenn der Würfel beliebig gestellt (gedreht) worden ist?

Warum kann es auf dem Papier zu einer Geraden g in einem ihrer Punkte nur eine einzige Senkrechte geben? (vgl. Fig. 6).

Zeichne mit Benützung des Winkelscheites (= m. Wsch.) die Senkrechte zu einer gegebenen Geraden g und zwar

α) in einem ihrer Punkte P (H. 9)!

β) durch einen Punkt P außerhalb g (H. 10)!

Zeichne („fälle") zu einer Geraden g mehrere Senkrechten (H. 11): welche Lage zueinander haben wohl diese Senkrechten (Fig. 10)? — Wie muß man beim Zeichnen verfahren, damit die zu einer Geraden

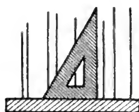


Fig. 10.



Fig. 11.

g Senkrechten die g durchschneiden? (Fig. 11.)[1] — Erprobe, ob die Zeilen eines Buches parallel sind, ebenso je zwei Ränder des Heftes!

Zeichne einen Parallelstreifen aus Papier und schneide ihn aus: wie bestimmt man seine „Breite"? Was ist wohl die sogenannte „Entfernung" oder der „Abstand a zweier Parallelgeraden g und g_1 voneinander"? (Fig. 15).

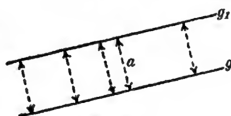


Fig. 15.

7. a) **Ebene.** — Lege auf die obere (vordere, ...) Fläche des Würfels ein Heft (steifes Papier, Brettchen); wie weithin kann diese Würfelfläche ausgedehnt gedacht werden? Nach wieviel Richtungen

---

1) Zwei weitere Arten, mittels des Winkelscheites zu einer Geraden a beliebige sie durchschneidende Senkrechten b zu erhalten, sind die folgenden (deren frühe Einübung und stets abwechselnde Benützung sich sehr empfiehlt):

1. (Fig. 12) Lege das Wsch. mit einer seiner kleineren Seiten an a an, dann an dessen längste Seite das Lineal; darauf verschiebe das Wsch. längs des Lineals und ziehe entlang der noch nicht benützten Seite des Wsch. die gewünschte Senkrechte b.

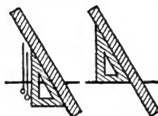


Fig. 12.

2. (Fig. 13) Lege das Wsch. mit seiner längsten Seite an a an, dann an das Wsch. ein Lineal, halte letzteres fest und drehe das Wsch. auf dem Papier so, daß jetzt seine bis jetzt noch nicht benützte dritte Seite an das Lineal zu liegen kommt; verschiebt man nun das

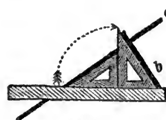
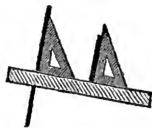
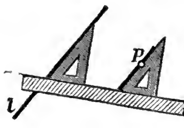


Fig. 13.





a Fig. 14. b

Wsch. längs des Lineales, so geben die Geraden, die man stets entlang der längsten Seite des Wsch. zieht, lauter zu a Senkrechten b.

Hiermit hat man auch verschiedene Arten, um mit einer Geraden parallele Gerade zu ziehen (z. B. Fig. 14, a u. b).

hin kann ein gezeichnetes Stück einer Geraden verlängert werden? Kann eine Würfelfläche auch nur nach zwei Richtungen hin verlängert werden? Nein, sondern nach den zwei Richtungen eines jeden Geradenstückes, das in der Würfelfläche liegt. Eine solche Fläche, in der in allen beliebigen Lagen gerade Linien angenommen werden können, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene.

Wie kann eine Fläche als eben erprobt werden? Nenne beliebige Ebenen im Zimmer, im Haus, am Haus und sonst!

b) **Wagrechte, lotrechte, schräge Ebene.** — Sieh hier diese Schüssel, ich schütte Wasser hinein. Wie gestaltet ist die Wassermenge während des Einschüttens? und wie ist sie nach einiger Zeit? ... Wie benützt der Maurer das Senkblei, um die Mauersteine lotrecht übereinander zu schichten? Genügt das Senkblei, um die Mauerwand eben zu erhalten? Könnte sie nicht bei alleiniger Benützung des Senkbleis zur Mauer eines runden Turmes werden? Warum wird also noch eine ausgespannte Schnur benützt, an welcher der Maurer mit seinem Senkblei entlang fährt?

Zeige die obere Fläche deiner Bank; ist deren Ebene wagrecht oder lotrecht? Wenn nicht, wie nennt man sie deshalb wohl? Stelle dieses Brettchen wagrecht, lotrecht, schräg zum Zimmerboden? Kann die Ebene einer Bank (Straße, Schlittenbahn usw.) verschieden schräg sein?

8. **Zueinander senkrechte Ebenen** (des Würfels). — Lege die eine Hand an die untere Fläche, dann die andere an eine Seitenfläche nnd lasse die flachen Hände in ihrer Stellung; wenn ich den Würfel wegnehme, wie stehen jetzt die Hände zueinander? Zeige am Würfel ein anderes Paar zueinander senkrecht stehender Flächen und nenne sie! Ebenso auswendig noch ein solches Paar! — Welche Flächen des Würfels stehen senkrecht zur oberen Fläche? zur rechten Fläche? .? Wieviele Paare zueinander senkrechter Würfelflächen gibt es? — Zeige auch hier im Zimmer solche Paare, nenne auch ebensolche auf der Straße u. dgl.!

9. **Die Strecke.** — Zeichne eine Gerade g (H. 15), wähle auf ihr einen Punkt A[1]) und einen zweiten Punkt B: der von beiden Punkten begrenzte Teil von g heißt Strecke; sie gibt die „Entfernung“ oder den „Abstand beider Punkte voneinander“ an. A und B heißen die Grenzpunkte der Strecke; diese selbst wird durch AB oder BA bezeichnet. [Hinweis auf die Bedeutung einer Fahrkarte „Berlin—Hamburg“ und der anderen „Hamburg-Berlin“!]. — Zeichne eine (größere) Strecke CD und noch eine kleinere XY sowie verschieden gerichtete (H. 16)!

1) Punkte werden stets durch große lateinische Buchstaben, Geraden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet.

Wie kann man die Länge einer Strecke messen? — Erklärung des (Meter-) Maßstabes und seiner Unterabteilungen (H. 17).

Hier sollte ein Ausflug in den Schulhof eingeschoben werden, bei dem das Abstecken einer Strecke durch Signalstangen und deren wiederholtes Abschreiten durch Schüler vorgenommen werden muß, ebenso das Messen der Strecke durch Meßlatten und Bandmaß sowie das Berechnen der Schülerschrittlänge, ferner auch das Aufsuchen eines Punktes auf der Strecke selbst, sowie deren Verlängern mittels Einvisierens. — Ein zweiter Besuch im Schulhof kann das Abstecken eines Dreiecks und das Messen seiner Seiten bringen, woran sich das Zeichnen im verkleinerten Maßstab als Klassen- und Hausübung anschließt.

Miß mit dem Metermaß die Länge der einen Schulzimmerwand; schätze dann die Länge der anderen, hierauf miß sie!

Schätze die Breite der Bank in dm, dann in cm; darauf miß sie! Ebenso die Breite des Fensters u. dgl. Miß eine Kante des Würfels, dann eine andere! Schätze die Breite eines Daumennagels in mm, dann miß sie! Ebenso . . .!

Bemerkung. Hier sind auch die nicht zu umgehenden Meßfehler durch Selbsterfahrung vorzuführen: mit einem in mm geteilten (zusammenlegbaren) Metermaßstab wird die Länge eines Stabes (einer Bank u. dgl.) durch einen Schüler auf halbe mm genau gemessen, und er schreibt sein Meßergebnis geheim auf einen Zettel; ebenso läßt man einen zweiten und dritten und vierten Schüler verfahren. Die Eröffnung der Zettel weist fast durchweg verschiedene Ergebnisse auf. Es wird die Unmöglichkeit ganz genauen Messens besprochen (und bei der Lehre von den Dezimalbrüchen z. B. und später bei der vom abgekürzten Rechnen wird auf den Sinn bzw. Unsinn des Beibehaltens zu vieler Stellen rechts vom Komma hingewiesen).

Zeichne du an die Tafel eine wagrechte Strecke von 3 dm (ins Heft 3 cm)[1]), dann du eine schräge von 5 dm, ferner du eine von 2 dm Länge (H. 18). Ebenso H. 19 und 20 (schreibe an die Strecken deren Längen). Zeichnet 5 verschieden lange Strecken (H. 21), dann schätzt ihre Längen, darauf meßt sie und traget die beiderlei Werte, ebenso den jedesmal gemachten Schätzungsfehler in eine Tabelle ein. Ebenso H. 22.

10. **Die vier Grundrechnungsarten mit Strecken.** — Zeichne zwei Strecken a und b (H. 23), dann addiere sie nach dem Augenmaß und prüfe die Streckensumme; hierauf zeichne dasselbe mit dem Maßstab genau darunter und schreibe den gemachten Fehler daran. Ebenso für $u + v + w$ (H. 24). — Entsprechend subtrahiere (H. 25) und

1) Weiterhin werden alle Längen als **dm** an die Tafel, als **cm** ins Heft gezeichnet.

zeichne dabei $(r-s)$ m. d. M. zweimal. Entsprechend $(x+y-z)$; wie kann dieses Addieren und Subtrahieren in verschiedener Reihenfolge und Anordnung durchgeführt werden? (H. 26). — Ferner zeichne eine Strecke a und vervielfache sie mit 2 (H. 27). Entsprechend verfahre behufs zeichnerischer Darstellung von $3b$, $(2r+3s)$, $(5x-3y)$ (H. 28, 29, 30). Zur Übung (und Wiederholung) wähle auch (H. 31) auf einer Geraden 3 oder mehr gleichweit entfernte Punkte und errichte in jedem der Punkte gleich oder ungleich große (H. 32a u. b) Senkrechten von gegebener Größe; dann schreibe die entsprechenden Maße in die Zeichnung! — Oder zeichne m. M. u. Wsch. eine in gegebener Weise aufwärts oder abwärts steigende Treppenlinie (H. 33, 34) u. dgl.

Als Einschiebung empfiehlt sich hier ein weiterer Ausflug in den Schulhof, bei dem die vorher kurz erklärte und verdeutlichte Kreuzscheibe zum Errichten einer zu einer Geraden Senkrechten verwendet wird. — Endlich teile eine Strecke a (H. 35) zuerst n. d. A., dann durch Falten eines gleichlang gemachten Papierstreifens (oder Fadens) annähernd genau, dann auch m. d. M. möglichst genau in zwei gleiche Teile und beachte die Fehlergröße[1]). Entsprechend teile a in drei gleiche Teile (H. 36); dann bilde $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$ in verschiedener Weise (H. 37). Auch führe die Teilung einer Strecke in 4, 8, 5 gleiche Teile aus (H. 38, 39, 40) und zeichne und erkläre in Anlehnung an das Bruchrechnen einfachere (Zweig-)Bruchteile von Strecken (H. 41, 42, 43).

11. **Das Quadrat.** — a) Stelle du den Würfel in der Grundstellung auf den Tisch und umfahre da seine Bodenfläche mit dem Finger, dann stelle du ihn auf die Tafel und umfahre da seine Grundfläche mit der Kreide: was zeigt sich? Eine Figur; sie heißt Quadrat. Zeige mir dessen Ecken und seine Seiten! — Ich zeige euch hier Quadratfiguren in Papier, in Holz, in Draht, an Körpermodellen —: nun sucht mir umgekehrt solche Figuren hier im Zimmer oder auch hier in diesen vor euch aufgehängten Mustern von Teppichen, Tapeten, Glasscheiben, Ofenkacheln u. dgl. Prüfet nach [wie? m. M. allein? oder auch m. Wsch.?], ob die betr. Figuren Quadrate sind.[2])

1) Schon hier kann bei Betrachten der Figur (H. 35) die Frage eintreten: Wie läßt sich die eine Hälfte MB der Strecke AB mit der anderen Hälfte zur Deckung bringen? etwa in verschiedener Weise? — Die Antwort wird, in Anlehnung an die Betrachtung eines körperlichen Modelles, bald durch die Schüler gefunden werden, nämlich: 1. durch Verschiebung, so daß MB auf AM zu liegen kommt; — 2. durch Umdrehen in der Ebene um M, so daß B auf A zu liegen kommt; — 3. durch Umwenden im Raume. So kann also hier schon die Benützung der Bewegung eintreten, und es kann erstmals die Vorstellung der Deckungsfähigkeit geweckt werden.

2) Bei diesen Beispielen wird sich auch schon das sog. „Quadrat über Eck" einstellen, und es mag ruhig als solches erwähnt werden; behandelt wird es später.

Wie könnte man wohl das Zeichnen des Quadrates auch ohne Benützung des Würfels ausführen? Genügt es, wenn man eine Seite zeichnet, an deren Grenzpunkten zu ihr Senkrechten zieht und auf ihnen Strecken gleich der ersten Seite abschneidet? (H. 44).

Schneide zwei gleichbreite Parallelstreifen aus, begrenze jeden durch eine Senkrechte zur einen Randlinie und lege die Streifen [nach Fig. 16] aufeinander; dann schneide die vorstehenden Teile ab. Was entsteht so als übrigbleibende Figur? Warum?

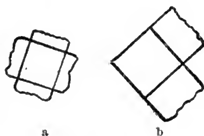


Fig. 16.

b) Deckung. Zeichne auf Schreibpapier ein Quadrat von 6 cm Seitenlänge, stich die Ecken auf weiteres Papier durch, zeichne auch die neuen Quadrate und schneide sie alle aus. Lege nun zwei solcher Quadratmodelle so aufeinander, daß sie „einander decken“ oder „in Deckung sind“; auf wieviele Arten kann man sie „in (zur) Deckung bringen“?

c) Mittellinien und Eckenlinien. Lege eines der Papierquadrate so vor dich hin, daß eine Seite wagrecht liegt: in dieser Grundlage heißt die untere Seite die Grundseite. Nun falte das eine Quadrat so, daß die Grundseite die ihr parallele deckt (Fig. 17), das andere so, daß linke und rechte Seite einander decken (Fig. 18). Welche Lage haben die Bruchlinien im Quadrat? Wird man wohl die eine die wagrechte und die andere die lótrechte Mittellinie nennen dürfen? warum so? Miß ihre Längen ab: Ergebnis der Vergleichung? warum? Nun falte ein Quadrat so, daß an ihm beide Mittellinien entstehen (Fig. 19); wie teilt jede die andere? wie liegt wohl jede zur anderen?

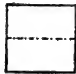

Fig. 17.


Fig. 18.


Fig. 19.

Zeichne nun auch die drei Modellfiguren genau ins Heft — wie ist das wohl zu machen? (H. 45).

Nun falte auch ein ungebrauchtes Quadrat so, daß ein Eck sein Gegeneck deckt. Auf wieviel verschiedene Weisen ist dies möglich? Welche Lage im Quadrat haben die Bruchlinien? Sie heißen Eckenlinien (Fig. 20 u. 21). Miß ihre Längen ab: Ergebnis? warum? Nun falte am selben Quadrat beide Eckenlinien (Fig. 22); wie teilt jede die andere? wie liegt wohl jede zur anderen?


Fig. 20.


Fig. 21.


Fig. 22.

Zusammenfassung: „Im Quadrat sind die zwei Mittellinien gleichlang, halbieren einander und stehen aufeinander senkrecht; ebenso die zwei Eckenlinien.“

Wie wird man wohl aus der gegebenen Eckenlinie das zugehörige Quadrat zeichnen?

Zeichne nun auch die drei Modellfiguren genau nach! (H. 46).

Lege nun das letzte Modell so, daß die Eckenlinien wagrecht und lotrecht werden (Fig. 23): in dieser Lage heißt die Figur „Quadrat über Eck". — Zeichne ein Quadrat *ABCD*, dessen Seite = 16 mm ist; dann zeichne in dieses, also ihm eingeschrieben, und um es, also ihm umgeschrieben, das zugehörige Quadrat über Eck (H. 47 u. 48).

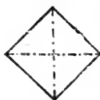


Fig. 23.

d) Symmetrie. — Falte ein Papier und breite es wieder aus; dann mache auf den einen Papierteil einen Tintenpunkt und falte rasch wieder. Was zeigt sich? — Mache noch einen zweiten solchen Punkt, jetzt aber auf den zweiten Papierteil und falte; was zeigt sich? — Nun zeichne mit Tinte eine gerade, eine krumme Linie und falte rasch; was erscheint? — Nun falte und durchstich die beiden Papierteile und breite wieder aus. — Wie kann man ein Quadrat falten, so daß sein einer Teil den anderen deckt? Ist solches Falten auch bei anderen Figuren möglich?

Wenn sich eine ebene Figur so falten läßt, daß ihr einer Teil den anderen genau deckt, so heißt die Faltlinie eine Symmetrieachse oder Spiegelbildachse, und die Figur heißt spiegelbildlich oder symmetrisch in bezug auf diese Achse (oder achsensymmetrisch). Beispiele? — Wieviele Symmetrieachsen hat das Quadrat? — Zeige hier im Zimmer Beispiele von symmetrischen

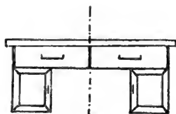


Fig. 24.

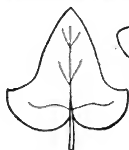


Fig. 25.

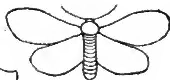


Fig. 26.

Gegenständen! Nenne auch andere mit Symmetrieachsen! (Fig. 24, 25, 26). — Stelle auf die Achse in Fig. 24, 25, 26 jedesmal senkrecht zum Papier einen kleinen Spiegel. Was ist das Spiegelbild? — Was ist das Spiegelbild der rechten Hand?

Zeichne ein Quadrat, dessen Seite = 8 cm ist; dann stelle den Spiegel auf jede der Mittellinien, dann auf jede der Eckenlinien. Was zeigt sich? — Wie kann man aus dem halben Quadrat mittels Spiegels zum Anblick des ganzen Quadrates kommen? — Welche der römischen Buchstaben oder Zahlzeichen sind symmetrisch? (Hierher Teile von der weiterhin folgenden Nr. 19 auf S. 136 f.].

Anmerkung. a) Es dürfte sich auch empfehlen, das Würfelmodell allein durch Falten von Papier (ohne Kleben) zu gewinnen (nach Nr. 134, S. 111) — in folgender Weise (Fig. 27). Falte 1, dazu rechtwinkelig 2, wähle AB beliebig als Kante des Würfels, falte 3 $\perp$ 1 durch B, dann je im Abstand AB die 4, 5, 6, 7, 8 stets $\perp$ 1; um nun jede Würfelfläche glatt zu lassen, lege 1 auf 7 und falte so die Eckenlinie 9 und mit ihrer Hilfe trage B nach B' und C nach C', falte 10 und 11, dann decke längs 1 und falte 12 und 13 (längs 11 und 10). Dann bleiben die sieben Einstecklappen stehen, alles andere wird längs der Umrißlinie abgeschnitten, darauf das Modell zusammengefügt, indem die je mit gleichen Buchstaben a, b, c, ... versehenen Felder aufeinander zu liegen kommen.

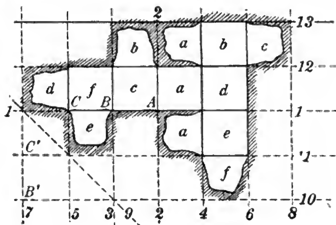


Fig. 27.

b) Auch das Falten eines Halbwürfelmodelles (Platte auf quadratischer Grundfläche) sowie (c) das Faltenlassen eines Viertelswürfels wenigstens für etwas gewandtere Schüler dürfte sich empfehlen (nach Nr. 134, S. 122 u. 124) — wie folgt (Fig. 28): Falte 1, dazu rechtwinkelig 2, wähle AB gleich der früheren Würfelkante, falte 3 $\perp$ 1 durch B, dann je im Abstand AB die 4, 5, 6, 7, 8 stets $\perp$ 1; um nun keine Würfelfläche zu falten, lege 1 auf 7 und falte so die Ecklinie 9, und mit ihrer Hilfe trage B nach B' und C nach C', falte 10 und 11 und mitten zwischen diesen die 12, dann klappe um 1 um und falte längs der neuen Lage von 12 die 13; darauf klappe um 9 um und falte 14 längs der neuen Lage von 9. Dies gibt den Punkt D, durch welchen 15 gefaltet wird. Dann stutze man die sieben Einstecklappen etwas zurecht und schneide längs der Umrißlinie ab; dann wird das Modell zusammengefügt, indem in der aufgeschriebenen alphabetischen Folge je mit denselben Buchstaben beschriebene Felder zur Deckung kommen.

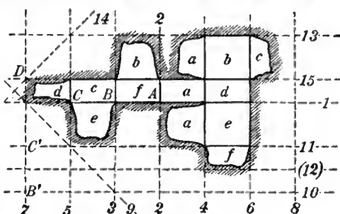


Fig. 28.

c) Das Modellieren eines Viertelswürfels kann folgendermaßen erfolgen (Fig. 29): Falte 1, dazu senkrecht 2, wähle $AB = BC$ gleich der früheren Würfelkante, falte durch B die 3 zu 1 senkrecht, ebenso durch C die 4, dann klappe um 2 um und falte 5, dann durch Auflegen von 2 auf 5 falte 6, darauf entsprechend 7 und 8, bringe 1 zur Deckung mit 7, gewinne so die Gerade d, und mit ihrer Hilfe zu A und D die Punkte A' und D', darauf falte durch A' und D' zu 2 senkrecht die 10 und 11, falte durch den auf 8 gewonnenen Punkt E die 12, dann 13. Dann stutze die sechs Einstecklappen zurecht und schneide längs der Umrißlinie ab. Dann kann das Modell zusammengefügt werden, indem man in der Reihenfolge der

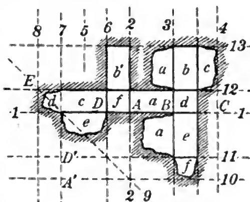


Fig. 29.

Buchstaben die mit je denselben Buchstaben bezeichneten Felder zur Deckung bringt.

12. **Netz des Würfels.** — Bringe den Würfel in die Grundstellung und umfahre seine Grundfläche; dann drehe den Würfel nacheinander um jede seiner Grundkanten bis zum Aufliegen auf dem Tisch und umfahre jedes der herabgelegten Quadrate als Nachbarfigur der Grundfläche. Nun zeichne die entstandene Figur als Netz des offenen Würfels genau (H. 49); dann füge das Deckquadrat hinzu.

Auch die zweite Art der Netzzeichnung führe aus (H. 50a u. b).

Hier schließt sich die Anleitung an über das Anfertigen des Körpermodelles: Durchstechen, Stehenlassen von vorspringenden Rändern behufs leichteren Zusammenklebens (Fig. 30a), oder Zusammenbinden an den passend angebrachten Löchern (Fig. 30b), Ganz- und Halbdurchschneiden, Kleben.

Zusatz. Bilde wie in Nr. 11a (S. 131) sechs Parallelstreifen aus steifem Papier, lege sie paarweise aufeinander nach Art von Fig. 16a,

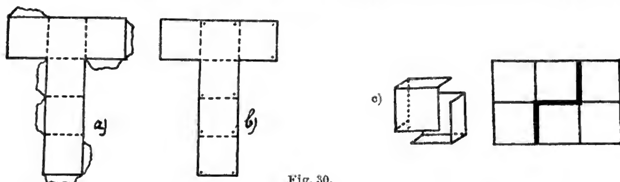


Fig. 30.

ritze je an den Rändern, knicke sie da und lasse kleinere Lappen hervorstehen; so läßt sich aus den sechs Blättern durch Zusammenstellen ein Würfel bilden, der ohne Kleben hält. (— Sehr einfach auch nach Art von Fig. 30c.)

13. **Ecken.** — Zeige ein Tischeck, das Eck einer Bank, . . .! Wieviele Ecken hat der Würfel? Zeige du die oberen Ecken (bleibe stehen); zeige du die vorderen Ecken, . . . wieviele Ecken hat jeder von euch sechsen gezählt? Sind es also $6 \cdot 4 = 24$ Ecken? warum nicht? warum nur 8? — Zeige ein oberes rechtes Eck! Gibt es nur ein einziges solches? Wieviele Angaben braucht man also zur Benennung eines bestimmten Eckes?

Ist dies hier das obere vordere linke Eck? . . .? Wie heißt dieses Eck? dieses Eck? . . .? (während zuerst der Würfel vor den Augen der Schüler bleibt, dann jedesmal nach Stellung der Frage rasch versteckt wird). — Zeige mir nun auch am Drahtmodell [dann auch an dem vor den Schülern umfahrenen Luftmodell] das rechte untere hintere Eck, das obere vordere untere (!) Eck, . . .!

14. **Kanten und Ecken.** — Wie heißt diese Kante? Du, nenne eine Kante und du, zeige du sie? An welchen Ecken endigt diese

Kante? Welche Ecken „begrenzen“ die vordere rechte Kante? ...? (zuerst mit, dann ohne Vorzeigen des Würfels).

Zeige ein Eck! Zeige die Kanten, die von diesem Eck ausgehen! Du, benenne sie! wieviele sind es? Ebenso für ein anderes Eck! Hier ist ein Luftwürfel: zeige sein hinteres oberes rechtes Eck! — Welche Kanten gehen von ihm aus? — Stellt euch einen Würfel vor: welche Kanten gehen vom linken unteren vorderen Eck aus? welche vom ...? Welche Kanten laufen auf das vordere obere rechte Eck zu? Welche Kante beginnt unten links vorn und zieht nach rechts? In welchem Eck treffen die obere hintere und die hintere linke Kante zusammen? und welche dritte Kante läuft auf dasselbe Eck zu? (Reichliche Übungsfragen!)

15. **Flächen und Ecken.** — Zeige ein Eck! Lege die Hand nacheinander auf die Flächen, die in jenem Eck zusammenstoßen! Nenne diese Flächen! wieviele sind es? Ebenso ...! — Zeige hier am Luftwürfel, welche Flächen im vorderen oberen rechten Eck zusammenstoßen! Ebenso ...! — Sage mir auswendig: welche Flächen stoßen im hinteren unteren rechten Eck zusammen? welche Fläche als dritte bildet mit der vorderen Fläche und mit der linken Fläche zusammen ein Eck? — Zeige, dann nenne drei Flächen am Würfel, die nicht in einem Eck zusammenstoßen!

16. **Ecken und Ecken** sowie **Eckenflächen.** — Zeige am Würfel zwei parallele Kanten, die in einer Würfelfläche liegen! auch solche zwei, die nicht in einer Würfelfläche liegen! Zwei andere solche! Wieviele Paare solcher gibt es? warum gerade 6? — Wir zerschneiden nun den Würfel längs eines solchen Kantenpaares (Fig. 31a u. b): die neu entstehenden Flächen (wie $ABCD$) heißen Eckenflächen zum Unterschied von den Seitenflächen. Ist eine solche Eckenfläche auch ein Quadrat? warum nicht? [Man nennt eine solche neue Figur ein Rechteck.] Zeige am Rechteck nun auch eine Eckenlinie! Zeige dieselbe auch am wieder zusammengesetzten Würfel! Wie läuft sie am Würfel? — Hier ist das Drahtmodell des Würfels: zeige ein Eck! dieses Eck ist mit welchen anderen Ecken durch Kanten verbunden? mit wievielen? also mit wievielen Ecken nicht? Denke jenes Eck mit diesen letzteren (4) auch durch Strecken verbunden; wieviele gibt es? Fallen sie alle jedesmal auf eine Würfelfläche? welche fällt nicht so, sondern wie zieht sie? Es gibt also außer den Flächen-Eckenlinien auch Körper-Eckenlinien. Wieviele gibt es von jeder dieser beiden Arten? Sage auswendig, welche zwei Ecken z. B. durch solche verbunden werden?

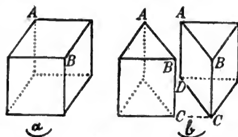


Fig. 31.

Auf wieviele Arten läßt sich der Würfel jedesmal in zwei Teile zerspalten durch eine Eckenfläche? Wieviele Eckenflächen gibt es also? Kann man je zwei von diesen zur Deckung bringen? warum? Sind sie ebenso groß wie die Würfelflächen? warum nicht?

17. **Körperachsen.** — Wir stecken einen Draht durch die Mitten zweier parallelen Seitenflächen und drehen um ihn: bei wieviel Stellungen kann die Grundstellung des Würfels erfolgen? Wieviele solcher Körperachsen gibt es? Weshalb kann jede solche Achse eine „vierzählige Symmetrieachse“ genannt werden?

18. **Beschreibung des Würfels.** — Wenn ihr im naturgeschichtlichen Unterricht ein Tier oder eine Pflanze „beschreibt“, gebt ihr da die Merkmale in beliebiger (ungeordneter) Reihenfolge an? Wie wird dort bei der „Beschreibung“ geordnet? Wie kann man, wie wird man die Eigenschaften des Würfels ordnen, um eine Beschreibung von ihm zu liefern? Beschreibe also den Würfel!

19. **Verzieren des Quadrates** (Dekoration). — Oben (S. 130, Nr. 11, a) war davon die Rede, wie es sich empfehle, in verzierten Figuren verschiedener Art und Ausgestaltung die Quadratfigur herausfinden und erkennen zu lassen. In gleicher Weise empfiehlt es sich, nach Durchnahme der rein geometrischen Quadratfigur wenigstens an einigen Beispielen die Möglichkeit ihrer Verzierung aufzuzeigen und die Schüler selbst einige solche verzierten Figuren zeichnen und wohl auch mit leichten Farbentönen oder mindestens mit dem farbigen Bleistift anlegen, ja auch Gestalten entsprechender Art modellieren zu lassen.

Es empfiehlt sich dies in verschiedener Hinsicht: einmal im Interesse der Abwechselung und damit der Belebung des Unterrichtes, dann aber auch besonders zur Weckung und Vertiefung des Sinnes für Form und Farbe, zur Anregung der Phantasie, nicht minder auch zur Hinleitung auf die Verwendung geometrischer Dinge in Kunst und Gewerbe.

Solches Verzieren zunächst des Quadrates kann in zweifacher Weise durchgeführt werden, nämlich durch Zeichnen und durch Modellieren.

a) Durch Zeichnen (vgl. die Figuren H. 51 bis H. 60).

Man verwendet in gezeichneten Quadraten von je 3 oder 4 cm Seite entweder die Mittellinien des Quadrates (H. 51, a—g) oder seine Eckenlinien (H. 52, a—c) oder beide vereint (H. 53, a, b). Von der hierin liegenden Zweiteilung des Quadrates kann man übergehen zur Dreiteilung (H. 54, a—g oder H. 55, a—n), zur Vierteilung (H. 56, a—n und o—w), zur Fünfteilung (F. 57, a—l), zur Sechsteilung (H. 58, a—f), zur Sieben- und Mehrteilung (H. 59, a—f und g—i) — selbstverständlich in beliebiger, natürlich bescheidener Auswahl unter den hier dargestellten oder sonstigen verwandten Figuren.

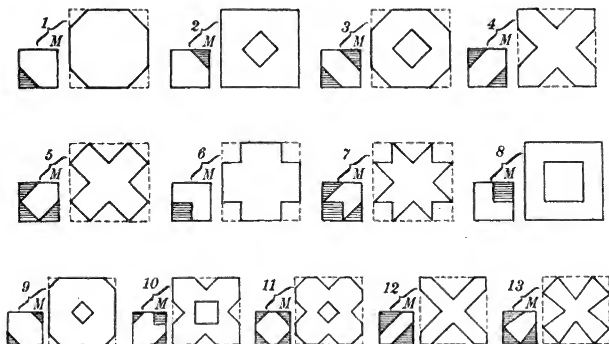


Fig. 32, a.

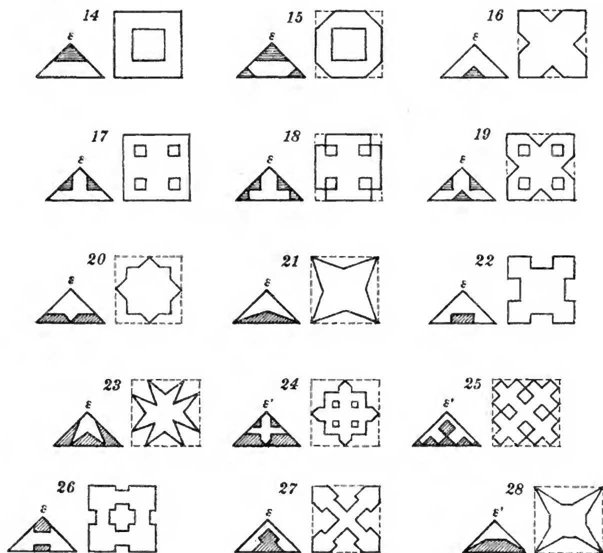


Fig. 32, b.

b) Durch Falten und Ausschneiden aus Papier (vgl. auf vorhergehender Seite Fig. 32, a und 32, b).

Man läßt aus Papier Quadrate ausschneiden, deren Seitenlängen durch 3 und 4 bequem teilbare Maßzahlen haben (also etwa Seitenlängen von 36 mm oder 48 oder 60 mm). Diese Quadrate werden dann entweder zweimal längs der Mittellinien gefaltet (Fig. 1 bis 13) oder zweimal längs der Eckenlinien (Fig. 14 bis 28), so daß die doppelt gefalteten Papierstücke nur noch ein Viertel der ursprünglichen Größe zeigen und im ersteren Fall ein kleines Quadrat, im zweiten ein kleines rechtwinkeliges gleichschenkeliges Dreieck darstellen [die viertelsgroßen Figuren sind hier im Bild stets neben die bezügliche Hauptfigur gezeichnet]; in jenem Quadrat ist der Schnittpunkt der Mittellinien stets durch M, in diesem Dreieck der Schnittpunkt der Eckenlinien stets durch ε bezeichnet.

Darauf werden Seiten passender Wahl entweder in zwei gleiche Teile geteilt (Fig. 1 bis 8 und 14) oder in drei gleiche Teile (Fig. 9 ff.), dann werden die in den kleinen Figuren angegebenen Linien gezogen, und es werden die durch Schraffierung hervorgehobenen Teile mit der Schere weggeschnitten. Wird dann das Papier wieder entfaltet, so ergeben sich Papierblätter bestimmter Umgrenzung, die in den Einzelfiguren der Hauptfigur 32 als Beispiele jeweils neben den gefalteten Figuren dargestellt sind.

20. **Zerschneiden des Würfels** und **Ableitung neuer Formen.**[1]) — a) Mit zwei Parallelflächen des Würfels parallel wird die Mittelebene gelegt; welcherlei Körperformen entstehen? Lege den einen Teil mit der Spaltfläche an oder auf den Spiegel; was sieht man? — Lege den einen Teil mit der Quadratfläche auf den Tisch; dann denke dir eine Reihe solcher „Platten“ aufeinander gelegt; was entsteht?

b) Durch zwei Gegenkanten des Würfels wird eine Ebene gelegt; welche Körperformen entstehen? auf welcher Art von Grundfläche sind sie aufgebaut? (Spiegelbenützung!) — Lege einen solchen Teil auf die Spaltfläche als Grundfläche; könnte das ein Modell sein für ein Hausdach? oder wofür sonst?

1) Dieses Zerschneiden braucht von den Schülern nicht ausgeführt zu werden. Nach dem Stellen der bezüglichen Fragen und nachdem deren Lösung versucht worden, mögen die betreffenden genügend großen Modelle der Schulsammlung vorgezeigt werden. — Wie aus dem Würfel durch Abschneiden leicht zu bestimmender Teilstücke die Formen des regelmäßigen Kristallsystemes abgeleitet werden können und zwar von jüngeren Schülern, zeigt in anerkennens- und dankenswerter Weise das jüngst erschienene Büchlein von J. Ruska: „Leitfaden der Mineralogie“ (1910). So verlockend es wäre, wenigstens die einfacheren solcher Ableitungen hier aufzunehmen, so ginge das doch über den hier zu behandelnden Anfangsunterricht hinaus.

c) Dasselbe wie b), nur werden durch zweimal zwei Paare sämtlicher parallelen Gegenkanten die Ebenen gelegt.

d) Vom Mittelpunkt des Würfels aus werden je nach den vier Ecken einer Seitenfläche Strecken gezogen, und durch je zwei solche Nachbarstrecken wird ein Schnitt gelegt. In wieviele und was für Teilstücke zerlegt sich der Würfel? (= 6 Pyramiden).

[e) Wie muß man den Würfel zerschneiden, damit die Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck wird?]

47. Die aufrechte quadratische Säule.[1])

1. **Aufstellung.** — Verschiedene Möglichkeiten der Aufstellung. Grundstellung in der Art, daß das Quadrat in seiner Grundlage (§ 46, 2) die Bodenfläche bildet. In wievielfacher Weise ist die Grundstellung möglich? (Untere und obere Grundfläche; Seitenflächen).

2. **Flächen.** — Wie beim Würfel Aufsuchen der Zahl der Flächen, ihrer Lage, ihrer Benennung, der Paare von parallelen Flächen, auch der Paare von zueinander senkrechten Flächen! (Benützung von Pappmodell, Drahtmodell, Luftmodell.) Übereinstimmung (Verschiedenheit von) mit dem Würfel?

Zerschneiden der Hochsäule in Würfel; dann Betrachtung des Reststückes (d. i. einer niederen quadratischen Säule) und Feststellung der Übereinstimmung beider Arten von quadratischen Säulen (Fig. 33).

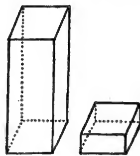


Fig. 33.

3. **Kanten.** — Aufsuchen der Anzahl von Kanten, ihrer Lage, ihrer Benennung i. a. und im besonderen (Grundkanten und Seitenkanten). Schätzen und Messen der Kantenlängen; wieviele Gruppen? An den verschiedenen Arten des Modells und aus der inneren Anschauung Benennen einzelner gezeigter Kanten, aber auch Aufsuchen benannter Kanten.

Kanten parallel mit Kanten; Gruppen; Zahl dieser Gruppen; ihre Verteilung im Raum.

Kanten senkrecht zu einer Kante (an ihrem einen Grenzpunkt, an beiden Grenzpunkten): Schätzen und Erproben mit dem Winkelscheit, ob senkrechte Stellung.

---

1) Zuerst läßt man durch Aufeinandersetzen von gleichen Würfeln eine Säule entstehen und dann wird eine wirkliche „Säule" benützt, d. h. eine solche, bei der die Höhe mehr als doppelt so groß ist als die Grundkante. Das Abschneiden von Würfeln von der Säule, d. i. deren Zerlegen in Würfel, führt zu Reststücken, die zwar nicht säulenartig sind, aber doch auch als quadratische Säulen aufgefaßt werden müssen.

Kanten parallel mit (zu) einer Fläche; Gruppen solcher und deren Anzahl (und Verteilung).

Flächen parallel mit einer Kante; Gruppen solcher und deren Anzahl; je zwei solcher bilden ...?

4. **Rechteck.** — Erfassen der Rechtecksfigur an den Modellen, ihre Unterscheidung vom Quadrat, ihr Übereinstimmendes mit dem Quadrat. Aufsuchen von Rechtecken an Gegenständen im Zimmer und sonst, ebenso an vorgelegten Mustern (Tapeten, Teppichstücken, geäzten Glasplatten, Ofenkacheln, Holzschnitzereien, Verzierungen). — Entstehen lassen durch Voranschieben eines kleinen Lineales auf Sand (— wann würde hierbei ein Quadratentstehen? —); Herablassen und Aufziehen eines Rollvorhanges u. dgl.

Umfahren des Rechtecks am Modell und an Gegenständen des Zimmers, darauf Umfahren in der Luft, dann Zeichnen an der Tafel und ins Heft (mit M. und Wsch.) und zwar zuerst beliebig in der Grundlage (H. 68) und in schiefer Lage (H. 69), dann auch nach bestimmt vorgegebenen Maßen (H. 70: etwa 4 cm und 1 cm; 17 mm und 44 mm; 1,03 dm und 0,09 dm).

Hier empfiehlt sich das Abstecken eines Rechtecks im Hof nach Wahl einer Seite und Errichten von Senkrechten in deren Grenzpunkten mittels Kreuzscheibe und Abmessen gleicher Strecken auf den Senkrechten; darauf Erproben der letzten Seite und der letzten zwei Winkel!

5. **Deckung** und **Symmetrie beim Rechteck** (R.). — Zeichne ein Rechteck „von 5 cm auf 8 cm Länge", durchstich seine Ecken auf dickeres Papier mehrmals und schneide die erhaltenen Rechtecke aus. — Versuche zwei solche Rechtecke zur Deckung zu bringen; in wievielen Lagen gelingt es? (Gegensatz zum Quadrat! = Wiederholung des Versuches bei zwei Quadraten.)

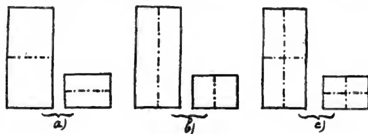


Fig. 34.

Lege ein Rechteck in Grundlage vor dich und falte wie früher (§ 46, 11 c), dann falte ein zweites Rechteck in zweiter Art: Entstehen je einer Mittellinie, die zugleich Symmetrieachse ist (Fig. 34, a u. b). Nun falte ein gleiches Rechteck auch so, daß die beiden Mittellinien entstehen (Fig. 34, c): wie teilt hier jede die andere? wie liegt wohl jede zur anderen?

Zeichne nun auch die Modellfiguren nach! (H. 71).

Ferner ziehe in einem Rechteckmodell eine Eckenlinie und falte längs ihr (Fig. 35): kommen hierbei die beiden Teilstücke zur

Deckung? Wenn nicht, können sie etwa doch in anderer Weise zur Deckung gebracht werden? wie kann dies geschehen? (Fig. 36.)

Nun falte ein Rechteck nach den zwei Eckenlinien und zeichne die entsprechenden Figuren (H. 72); dann miß die Eckenlinien! Wie groß sind sie? wie teilt jede die andere? steht auch hier jede zur anderen senkrecht?



Fig. 35.

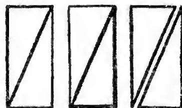


Fig. 36.

Zusammenfassung: Im Rechteck halbieren die zwei Mittellinien einander, stehen zueinander senkrecht und sind Symmetrieachsen der Figur; die Eckenlinien sind gleichlang, halbieren einander, sind aber i. a. nicht senkrecht zueinander und sind nicht Symmetrieachsen der Figur.

Zeichne ein Rechteck (H. 73), dessen wagrechte Mittellinie = 42 mm und dessen andere Mittellinie = 8 mm ist, und ein anderes schiefgelegtes, dessen Mittellinien 2,7 und 1,5 cm lang sind! Wie zeichnet man?

Wie läßt sich mittels Messen der Eckenlinien finden, ob ein angebliches Rechteck (eine Türe oder dgl.) tatsächlich ein Rechteck ist?

6. **Netz der quadratischen Säule.** — Entstehenlassen des Netzes nach Art von § 46, 12 und zwar in zwei Gestaltungen (H. 74). Dann Modellieren nach gegebenen Maßen!

7. **Ecken.** — Entsprechend § 46, 13 Aufsuchen der Anzahl der Ecken, ihrer Lage, ihrer Benennung; dann Benennung bestimmt vorgezeigter Ecken, Aufsuchen benannter Ecken.

8. **Kanten und Ecken** sowie **Flächen und Ecken:** vgl. § 46, 14 u. 15.

9. **Eckenflächen.** — Entsprechend wie beim Würfel Aufsuchen und Unterscheiden der Grundflächen, der Seitenflächen und der Eckenflächen, letztere gewonnen durch das Zerschneiden des Körpers (Fig. 37). Wieviele Eckenflächen sind möglich? Welcher Art sind ihre Figuren? Sind die entstehenden Rechtecke alle gleich? oder wieviele Formen von Rechtecken der Eckenflächen gibt es? (Fig. 37 = $ABCD$ und $XBYD$.)

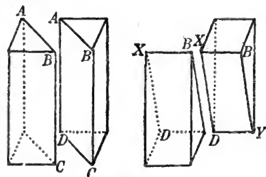


Fig. 37.

Warum nur zwei Formen solcher Rechtecke? — Die Eckenlinien dieser Eckenflächen (z. B. AC oder XY) sind Körper-Eckenlinien der quadratischen Säule. Wieviele derselben gibt es? Sind sie alle gleich lang oder zum Teil verschieden lang?

10. **Körperachsen** gibt es bei der quadratischen Säule wieviele? Sind sie alle gleich lang? oder alle verschieden?

Welche Achse wird „Hauptachse“ heißen? und wie liegen die „Nebenachsen“? — Warum kann man wohl die Hauptachse eine „vierzählige Symmetrieachse“ nennen?

11. **Beschreibung der quadratischen Säule.** — Reihenfolge!

12. **Vergleichung der quadratischen Säule mit dem Würfel,** d. h. in geordneter Folge Angabe der gemeinsamen und der unterscheidenden Merkmale. (Vgl. § 48, 7.)

13. **Verzieren des Rechtecks durch Zeichnen** (Dekoration). — In gleicher Weise wie beim Quadrat (S. 136, Nr. 19) und aus gleichen Gründen läßt sich auch die Verzierung des Rechtecks durchführen: entweder indem man das Rechteck einfacher Höhe verwendet (H. 60, a—h) oder indem man seine Schmalseite in zwei gleiche Teile teilt (H. 61, a—i) oder in drei gleiche Teile (H. 62) oder in vier (H. 63) oder in fünf (H. 64) oder in sechs (H. 65) oder in sieben (H. 66) oder in noch mehr gleiche Teile (H. 67) und dann die in den Vorlagen ausgezogenen Linien ebenfalls kräftiger auszieht und, soweit passend, noch Farbentöne zufügt.

14. Anregung zur Auffindung von **Verzierungsfiguren** durch Falten von Papierrechtecken und Ab- oder Ausschneiden passend gewählter Teilstücke — ähnlich wie beim Quadrat (S. 138).

48. Der Quader.

(Die aufrechte rechteckige Säule.)

1. **Aufstellung.** — Verschiedene Möglichkeiten der Aufstellung; Wahl einer solchen.

2. **Flächen, Kanten, Ecken.** — Ihre Anzahl, Art, Lage, Benennung (unter steter Vergleichung mit dem Würfel und mit der senkrechten quadratischen Säule).

3. **Rechtecke von verschiedener Form.** — Modelle, Beispiele, Zeichnen mit Maßangaben, insbesondere betreffs des Zusammenpassens, betreffs der Übereinstimmung und des Widerspruches in den Formen (Türfüllung, Bilderrahmen u. dgl.) (s. H. 75).

4. **Netz des Quaders.** — Entstehenlassen, Zeichnen, Ausschneiden, Modellieren (H. 76).

5. **Körperachsen:** alle drei von ungleicher Länge. — Hat der Körper auch Symmetrieachsen? Ist auch hier jede der Symmetrieachsen vierzählig? Warum ist jede nur „zweizählig“?

6. **Beschreibung des Quaders.**

7. Auch eine **Vergleichung** der drei bis jetzt betrachteten Körper kann durchgeführt und in gemeinsamer Arbeit an die Tafel angeschrieben werden, etwa in folgender Weise:

A. Übereinstimmende Merkmale:

6 Flächen
12 geradlinige Kanten
Je 2 Kanten senkrecht zueinander
Je 3 Kanten ein Eck bildend
⋮

B. Unterscheidende Merkmale:

Würfel.	Quadratische Säule.	Quader.
Nur Quadratflächen	2 Quadratflächen und 4 Rechtecksflächen	Nur Rechtecksflächen
6 gleiche Flächen	2 + 4 je gleiche Flächen	2 + 2 + 2 je gleiche Flächen
Nur gleiche Kanten	8 + 4 je gleiche Kanten	4 + 4 + 4 je gleiche Kanten
⋮	⋮	⋮

49. Die aufrechte Kreiswalze (Kreiszylinder).

1. **Aufstellungsarten.** — Wahl einer bestimmten Aufstellung. Beispiele: Bleistift, Ofenröhre, . . .; — Münze, Damenbrettstein, . . .; gebohrtes Loch.

Aufbau verschieden hoher Walzen aus Münzen oder Brettsteinen!

2. **Flächen.** — Ihre Anzahl, Lage, Benennung (= 2 Grundflächen und die Mantelfläche). Lege ein Lineal mit der Kante zuerst auf eine Grundfläche in verschiedenen Richtungen, dann ebenso auf die Mantelfläche: welcher Unterschied zeigt sich? Man unterscheidet hiernach die ebene Fläche (Ebene) und die krumme Fläche.

Erfragen einiger Beispiele von krummen Flächen, die aber sofort auch an den entsprechenden Modellen vorgezeigt werden müssen (Kugel, Eikörper, Sphäroid, Ellipsoid, Schraubenfläche u. dgl.).

Gib Beispiele von ebenen Flächen an! Prüfung der eben gehobelten Fläche durch den Schreiner? Sind solche sog. ebenen Flächen ganz genau eben? (Betrachtung ganz glatten Papiers durch die Lupe!) — Oberfläche des gepflügten, geeggten, gewalzten Ackerbodens, sowie des ruhigen Wassers.

3. **Kanten.** — Anzahl, Lage, Arten der Kanten. — Muß eine Körperkante begrenzt sein? Kann eine Linie offen oder geschlossen sein?

4. **Kreislinie.** — Beispiele?! Umfahren eines Geldstückes, eines Reifens (verschiedener Kreise) an der Tafel, auf Papier; dann Zeichnen der Kreislinie mit gespannter Schnur, dann auch mit dem Zirkel: Mittelpunkt, Halbmesser, Durchmesser. — [Kreisscheibe!]

Zeichnen verschieden großer Kreislinien ins Heft (H. 77). Dann auch Ausschneiden und Falten einer Kreisscheibe längs eines Durchmessers (: Deckung der Halbkreise :); ferner auch Falten längs

eines zum ersteren senkrecht werdenden Durchmessers (: Viertelskreise :). Darauf auch Zeichnen der entsprechenden Figuren (H. 78).

5. **Netz der Walze.** — Entstehenlassen, dann Zeichnen [mit der Angabe, daß die Länge des Mantelrechtecks, d. h. der Kreislinie, fast genau $3\frac{1}{7}$ mal so groß ist als der Kreisdurchmesser], Modellieren (H. 79).

Aufbau der aufrechten Walze durch Aufeinanderlegen von gleichartigen Geldstücken oder durch Auseinanderziehen einer japanischen Papierlaterne.

6. **Körperachse.** — Beispiele: Wagenrad, ... [wohl auch Vorzeigen einer schiefen Kreiswalze].

7. **Verwertung des Zirkels.** — Übertragen einer Strecke (H. 80), Addieren gegebener Strecken (H. 81 u. 82), ebenso Subtrahieren und Multiplizieren gegebener Strecken (H. 83 u. 84).

Anhang.

8. **Zwei Kreise in der Ebene.** — Zeichne auf steifes Papier zwei verschieden große Kreise (etwa von 5 cm und 2 cm Durchmesser), dann schneide sie aus und lege beide Kreisscheiben auf die Bankfläche ganz außereinander. Nun lasse die größere Kreisscheibe liegen und bewege die kleinere gegen die größere hin: welche verschiedenartigen Lagen beider Kreisscheiben gegeneinander sind herstellbar? Zeichne diese Lagemöglichkeiten!

Anwendung auf die Erklärung der Finsternisse.

9. **Ellipsenlinie.**

a) Knüpfe die Enden eines Fadens zusammen, bilde also eine Schlinge und lege diese um eine festgesteckte Nadel (H. 81 a); dann fahre mit Bleistiftspitze bei gestrecktem Doppelfaden rings herum und zeichne so einen Kreis. — Darauf stecke zwei Nadeln (Heftstifte) fest, gleichweit beiderseits von der Kreismitte entfernt, und schlinge um sie die geschlossene Fadenschlinge und zeichne wieder; dann wiederhole dies bei stets größer werdendem Abstand der Nadeln: jedesmal entsteht eine Ellipse. Diese geht in die doppelt gedachte Strecke über bei straffem Anspannen des Fadens zwischen den Nadeln.

b) Bilde an beiden Enden eines Fadens eine kleine Schlinge und stecke durch jede von diesen eine Nadel (Heftstift) und verfahre wie vorhin = Ellipsenzeichnen der Gärtner (H. 81 b).

50. Die Kugel.

1. Arten der **Aufstellung** =? (Beispiele!)

2. **Fläche.** — Mittelpunkt, Halbmesser, Durchmesser (— an durchschnittenen Holzmodellen und am Drahtmodell zu zeigen!). — Ist die Kugelfläche begrenzt? ist sie beliebigweithin ausgedehnt? Muß eine Linie (Fläche) beliebig ausgedehnt oder gar unendlich ausgedehnt sein, wenn sie unbegrenzt ist?

3. **Kanten** = ? **Ecken** = ?

4. Ebenes **Durchschneiden der Kugel.** — Wir schneiden einen Apfel (ein Kugelmodell) auf zwei verschiedene Arten durch: erstens in zwei Kugelabschnitte (deren Begrenzungslinie ist ein Kreis), und zweitens in zwei Kugelschnitze (deren Begrenzungslinien sind Halbkreise und ein Kugeldurchmesser).

Sind bei verschiedenen Kugelabschnitten deren Begrenzungskreise gleichgroß?

Wie muß wohl eine Kugel eben durchgeschnitten werden, damit die Schnittlinie ein größter Kreis oder ein Hauptkreis wird? Ein Hauptkreis teilt die Kugel in zwei Halbkugeln.

Jeder andere Schnittkreis bei einer Kugel heißt ein kleinerer Kreis oder ein Nebenkreis.

Anwendung auf die Erdkunde: Äquator — Parallelkreise — Pole — Mittagshalbkreise (Meridian**halb**kreis = Meridian) und Nullmeridian.

5. **Krümmung der Kugel.** — Ist ein Hühnerei (oder ein hölzernes „Stopfei“) gegen die beiden Enden hin gleichstark gekrümmt? wo ist es stärker, wo schwächer gekrümmt, also flacher? — Wie ist die Krümmung bei der Kugel? Zeichne (Fig. 38) durch denselben Punkt gehende verschiedene Kreise, deren Mitten auf einer Geraden liegen, und gib an, welche stärker oder schwächer gekrümmt sind als andere. — Was ist über die Krümmung bei der Ellipse zu sagen? (H. 81 a, b, c).

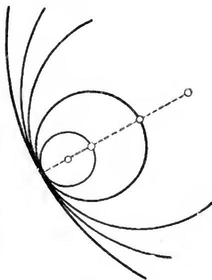


Fig. 38.

51. Der regelmäßige Vierflächer.
[Regelmäßiges Tetraeder.]

1. **Aufstellen:** entweder auf eine Fläche — oder auf eine Kante — oder auf ein Eck.

2. **Flächen.** — Anzahl, Verteilung (Lage) der Flächen?

Hat der Körper wagrechte Flächen? lotrechte Flächen? parallele Flächen?

3. **Kanten.** — Zahl der Kanten? (etwa $= 4 \cdot 3 = 12$ Kanten? warum nur $\frac{12}{2} = 6$?) Lage der Kanten: 3 Grundkanten und 3 Scheitelkanten. — Gibt es (Drahtmodell!) Kanten, die parallel einer Kante sind? (wo gab es solche?) — Gibt es Kanten, die parallel einer Fläche sind? (wo gab es solche? Beispiel?) — Gibt es Kanten, die senkrecht sind zu einer Kante (oder zu einer Fläche)? — Zu wieviel Kanten steht jede einzelne Kante schief?

Schätze, dann miß die Länge einer Kante, auch die einer zweiten, ...! Ergebnis = ?

4. Das **gleichseitige Dreieck.** — Nimm 3 gleichlange Bleistifte (Federnhalter) und bilde daraus ein Dreieck! An ihm Unterscheidung von Ecken und Seiten! Zeichne in die Luft ein gleichseitiges Dreieck! — Wer sieht hier an diesen Mustern (Tapeten oder Teppich usw.) das Vorkommen des gleichseitigen Dreiecks? Umfahre seinen Umfang! Schätze, dann miß bei einzelnen dieser Dreiecke die Länge einer Seite; dann berechne seinen Umfang!

Hier dürfte sich empfehlen, (wenigstens gewandtere Schüler) das Anfertigen eines gleichseitigen Dreiecks ohne Zeichnen, allein durch Papierfalten zu lehren (nach Nr. 134, S. 133f.), und zwar sogar auf zwei verschiedene Weisen, nämlich:

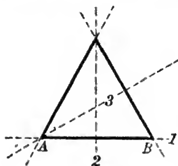


Fig. 39.

a) (Fig. 39) Falte das Papier längs einer Geraden AB, wähle auf ihr die Strecke AB gleich der gewünschten Dreiecksseite und falte zur Strecke AB deren Mittelsenkrechte 2; darauf halte A fest und falte um eine durch A gehende Gerade (3) so, daß Punkt B auf einen Punkt (C) der Faltlinie 2 zu liegen kommt. Wird dann noch AC und CB gefaltet, so ist das Dreieck ABC als gleichseitig gebildet.

b) (Fig. 40) Die vorige Art, ein gleichseitiges Dreieck durch Falten herzustellen, hat den Mißstand, daß durch das Dreieck selbst Faltungslinien hindurchgehen. Dies läßt sich auf folgende Art vermeiden.

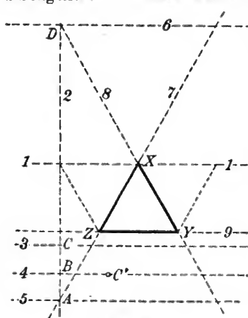


Fig. 40.

Falte 1, dazu senkrecht 2, wähle auf 2 die $AB = BC$ beliebig (gegen den unteren Rand des Papiers hin), falte 3, 4, 5 senkrecht zu 2, dann übertrage 5 durch Umklappen um 1 nach 6, welch letztere Linie entlang 5 gefaltet wird, darauf klappe 2 um eine durch A gehende Gerade (7) so um, daß Punkt C auf einen Punkt C' der Geraden 4 zu liegen kommt. Die entstandene Faltungslinie 7 treffe 1 im Punkt X; dann falte so, daß die Faltungslinie 8 durch X und durch den Schnittpunkt D von 2 mit 6 hindurchgeht. Jede weitere zu 2 Senkrechte 9 bestimmt auf 7 und 8 zwei Punkte Y und Z, und XYZ ist das gewünschte gleichseitige Dreieck.

Sollen noch weitere Dreiecke an XYZ angereiht werden, so falte man längs 9 und lege dieses 9 einmal bei Y knickend entlang 8 und ein zweitesmal bei Z knickend entlang 7. Man erhält so zuerst anschließend an XY ein neues gleichseitiges Dreieck und ferner an XZ anschließend ein drittes, dazu durch Fortsetzen der letzterhaltenen Faltungslinien nach unten noch ein viertes an YZ anschließendes Dreieck.

Zeichnen des gleichseitigen Dreiecks: Versuch des Zeichnens mit dem Maßstab; warum gelingt es nicht gut? — Ausführung mit dem Zirkel (Seite $s = 4$ cm oder $s = 5$ cm oder $s = 6$ cm bei wagrechter oder lotrechter Lage einer Seite): Beschreibung der Zeichenweise (H. 85).

Modellieren dieser Dreiecke; dann Abreißen eines Eckstückes und Versuchen, ob es sowohl die beiden anderen Eckstücke desselben Dreiecks, als auch die Eckstücke der beiden anderen Dreiecke zu „decken“ vermag.

5. **Winkel.** — a) Hier wird zur Einführung ein Zifferblatt (von 20 bis 30 cm Durchmesser) mit zwei verschieden großen Zeigern („Minutenzeiger“ und „Stundenzeiger“) benützt. Zunächst werden besondere Winkelgrößen modelliert: stelle du die Zeiger auf 3 Uhr, du auf 9 Uhr! Bilde du die Zeigerstellungen durch 2 Bleistifte nach! Zeichnet[1]) diese Stellungen an die Tafel, dann ins Heft! (H. 86).

Nun stecke ich auf den einen Zeiger (bei der 9 Uhr-Stellung) eine Papierhülse und verlängere ihn so: wird so der „Winkel“ größer? Wird er vielleicht dadurch größer, daß ich auch auf den anderen Zeiger eine gleichlange (oder längere oder kürzere) Papierhülse aufstecke? Wird der Winkel kleiner, wenn ich die eine Hülse oder gar beide Hülsen wieder wegnehme? — Wie könnte man wohl den Winkel vergrößern? oder verkleinern? Auf welche volle Stunde müßte man z. B. den einen Zeiger stellen, damit der 3 Uhr-Winkel kleiner wird? damit der 3 Uhr-Winkel größer wird? Zeichne die 2 Uhr- und 4 Uhr-Stellung (H. 87).

Beim Zeichnen heißen die Uhrzeiger die Schenkel des Winkels (warum wohl so?) und der Drehpunkt der beiden Zeiger heißt der Scheitel des Winkels.

b) Welche Lage zueinander haben die Zeiger (Schenkel) um 3 Uhr? um 9 Uhr? Erprobe in diesen zwei Fällen die gegenseitige senkrechte Stellung der Zeiger mit dem Winkelscheit! Wenn die Schenkel zueinander senkrecht stehen, so heißt ihr Winkel stets ein rechter Winkel („ein Rechter“ = R). [Erneutes Vorzeigen der bereits bekannten Kreuzscheibe!] — Wieviele rechte Winkel kommen vor im Quadrat? im Rechteck? Wieviele rechte Winkel kommen vor am Würfel? am Quader? am Vierflächner? — Nenne du zwei Würfelkanten, die einen Rechten bilden! du noch zwei andere!

c) Stelle am Zifferblatt die Zeiger auf 5 Uhr, auf 8 Uhr, 10 Uhr, 11 Uhr! Zeichne die betreffenden Stellungen! (H. 88). Welche Winkel sind hierbei größer als ein R? welche sind kleiner als ein R? Ein Winkel, der größer als ein R, heißt ein stumpfer Winkel, einer, der kleiner als ein R, heißt ein spitzer Winkel. Jeder von ihnen heißt auch, im Gegensatz zum R, ein schiefer Winkel. Welche Art von Winkel bilden die Uhrzeiger um 1 Uhr? um 7 Uhr?

1) Zur Erzielung guter Ordnung im Heft ist es ratsam, den Schülern die Lage der Kreismittelpunkte (koordinatenmäßig) anzugeben, ebenso den Kreishalbmesser. So auch weiterhin zwecks guter Austeilung der Figuren auf den einzelnen Seiten des Zeichenheftes. Nach der Fertigstellung einer Zeichnung soll stets die betreffende Beischrift in Tinte erfolgen.

um $^1/_2$12 Uhr? um $^1/_4$ nach 6 Uhr? Zeichne sie an die Tafel! Welche Art von Winkel kommt am Vierflächner vor? Zeichne ihn n. A.!

Zeichnet die möglichen rechtwinkeligen Zeigerstellungen, wenn stets ein Zeiger wagerecht ist und die Scheitel in gleicher Höhe liegen sollen! (H. 89). Dann zeichnet die vier Einzelstellungen zusammen an eine Figur (H. 90) und modelliert das nämliche sowohl durch zwei Bleistifte (oder Finger), als auch durch Falten eines Papierblattes (Fig. 41), dessen Umrandung unregelmäßig ist! Aus diesem schneidet nun einen der rechten Winkel aus, verseht das ausgeschnittene Stück mit einem Zeichen (*) und legt es mit der Vorder-,

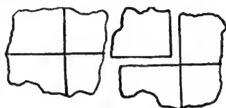


Fig. 41.



Fig. 42.

dann mit der Rückseite auf die übrigen drei rechten Winkel: es wird jeden dieser „decken“. — Modelliert nun auch einen spitzen Winkel und einen stumpfen Winkel (Fig. 42) und versucht mit jedem die rechten Winkel zu „decken“! Dann zeichnet auch die drei Hauptarten der Winkel in das Heft! (H. 91).

d) Zeige, dann zeichne die Zeigerstellung um 6 Uhr! (H. 92). Vergleiche die letztere Figur mit H. 90: wievielmal ist jene in letzterer enthalten? Wie könnte man an H. 92 rechte Winkel erhalten? Ein Winkel, dessen Schenkel genau entgegengesetzte Richtungen haben, heißt ein gestreckter Winkel. (Gehen auf der Straße!? Kolben der Dampfmaschine? Luftpumpe für das Fahrrad!?)

Durch wieviele rechte Winkel muß man den Zeiger hindurchdrehen, um den gestreckten Winkel zu erhalten? Also:

Ein gestreckter Winkel enthält zwei rechte Winkel.

6. **Falten des gleichseitigen Dreiecks.**

a) Modelliere ein gleichseitiges Dreieck (dessen Seite mindestens = 10 cm zu nehmen ist). Falte es dann so, daß die eine Seite a in die Richtung der anderen b fällt (Fig. 43 I); wohin muß dann der Endpunkt von a fallen — warum? Was geschieht hierbei mit dem Winkel (∢) zwischen a und b? Und kann dann ∢ 1 anders fallen als so, daß er den ∢ 2 deckt? — Nun falte dasselbe Dreieck auch so, daß die Seite c auf b zu liegen kommt (Fig. 43, II); wen deckt dann ∢ 1? Wenn also ∢ 3 so groß ist wie ∢ 1, und wenn ∢ 2 so groß ist wie ∢ 1, was folgt? — Wird die Sache in einem anderen gleichseitigen Dreieck anders sein können? Also:

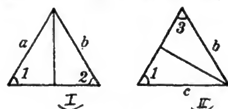


Fig. 43.

Im gleichseitigen Dreieck sind die drei Winkel gleichgroß.

Nun zeichne auch einzeln die drei Symmetrieachsen des gleichseitigen Dreiecks (H. 93); dann zeichne auch alle drei in demselben Dreieck. Welche Lage haben wohl die drei? Und wie weit wird ihr Schnittpunkt S von den drei Ecken entfernt sein? Demgemäß zeichne um S den Kreis durch die 3 Ecken, d. i. den dem Dreieck umgeschriebenen Kreis (seinen „Umkreis“)! (H. 94).

b) Bestimme im Papiermodell eines gleichseitigen Dreiecks die Mitten zweier Seiten BC und AC (wie? — Fig. 44) und verbinde sie durch die Strecke XY. Wird diese nach der einen Seite absinken können? oder nach der anderen Seite hin? Also: jene Verbindungsstrecke XY ist parallel zur dritten Seite BA. Nun faltet man um XY; wohin muß wohl die Spitze C zu liegen kommen?

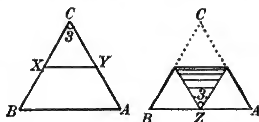


Fig. 44.

Doch wohl auf AB und zwar nach Z, in die Mitte von AB. — Nun verbinde man auch (Fig. 45) die Seitenmitten X und Z und falte um diese; dann kommt in gleicher Weise Eck B nach dem Falten auf AC und zwar in deren Mitte Y. Das neue umgelegte Dreieck deckt

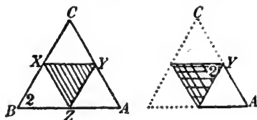


Fig. 45.

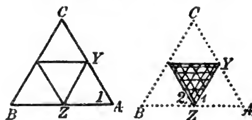


Fig. 46.

also das vorige, und jede solche Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten ist halb so groß als die dritte Seite. — Nun faltet man auch noch (Fig. 46) längs der dritten Mittelparallelen YZ; es erfolgt ein dreifaches Decken des inneren Dreiecks, und alle entstandenen Teildreiecke sind gleichseitig, also (6 a) sind ihre Winkel gleich. Drei solche Winkel (wie 1, 2, 3 in der letzten Figur) bilden aber einen gestreckten Winkel, d. h. $= 2$ R. Somit:

Jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks beträgt ein Drittel von 2 R (oder $^2/_3$ R).

Schneide nun 3 gleiche gleichseitige Dreiecke aus und lege sie nach Art der Fig. 47 aneinander; müssen die zwei freien Seiten a und b in eine Gerade fallen? warum? Füge an die freie Seite c noch ein gleichgroßes gleichseitiges Dreieck an; was erhält man? — Wenn man andererseits von a und b in gleicher Art noch drei gleichgroße gleichseitige Dreiecke anlegt, welche Figur entsteht so?

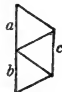


Fig. 47.

c) An der letzterhaltenen Modellfigur braucht man nur die drei Eckenstücke aufzurichten und zusammenzufügen (kleben, binden), um das **Netz des Vierflächners** zu erhalten (s. H. 113, III).

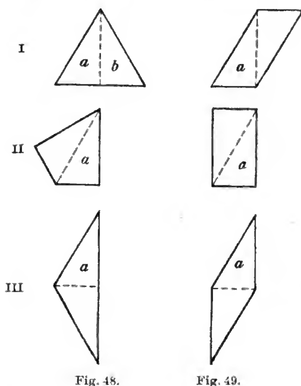


Fig. 48. Fig. 49.

d) Bilden neuer Formen. — Schneide ein gleichseitiges Dreieck in Papier aus, ziehe eine Achse in ihm, unterscheide die Hälften durch aufgeschriebene Zeichen (etwa *a* und *b*), dann schneide längs der Achse durch. Nun laß *a* liegen und füge daran *b*, ohne dieses im Raum umzuwenden, nach und nach mit jeder seiner Seiten (Fig. 48): es entsteht wieder das gleichseitige Dreieck (I), dann ein Deltoid (II — Beispiel?), endlich ein gleichschenkliges Dreieck (III — warum wohl so genannt?). Wird aber *b* zuvor im Raum umgewendet und wieder nach und nach an *a* angelegt (Fig. 49), so entsteht ein Parallelogramm (I und III — warum wohl so genannt?), dann ein Rechteck (II), letzteres als besondere Form des Parallelogramms.

e) Teile nun am Papiermodell des gleichseitigen Dreiecks jede Seite nicht wie bei b) in zwei, sondern in drei gleiche Teile (Fig. 50) und ziehe je zwei entsprechende Verbindungsstrecken; diese

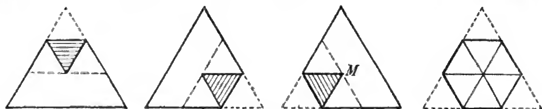


Fig. 50.

sind parallel, und die größere schneidet je ein Dreieck ab wie oben unter b). Faltet man also jedesmal um die kleinere, so kommt das Eck des Hauptdreiecks auf die Mitte der größeren Parallelstrecke zu liegen, und die drei Mitten fallen in einen einzigen Punkt *M* zusammen. Bleiben die drei Faltstücke zugleich umgelegt, so entsteht ein Sechseck. Welche Eigenschaft haben die Seiten dieses Sechsecks? Also: es entsteht ein gleichseitiges Sechseck. — Und welche Eigenschaften haben die Winkel dieses Sechsecks, da jeder aus zwei Winkeln je zu $\frac{2}{3}$R besteht? Also: es entsteht ein auch gleichwinkeliges Sechseck. Hier sind beiderlei Eigenschaften vereinigt; in diesem Falle sagt man:

„Ein Sechseck, das sowohl gleichseitig als auch gleichwinkelig ist, heißt ein regelmäßiges Sechseck."

Wieweit ist nun wohl (Fig. 51) Punkt *M* von den Ecken des Sechseckes entfernt? Wenn gleichweit, so gilt der folgende Ausspruch („Lehrsatz"):

„Um das regelmäßige Sechseck läßt sich ein Kreis beschreiben" — und umgekehrt:

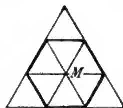
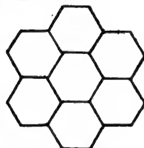


Fig. 51.

„In den Kreis läßt sich mit seinem Halbmesser als Seite ein regelmäßiges Sechseck einbeschreiben."

Zeichne ein regelmäßiges Sechseck in zwei Hauptlagen (H. 95), ebenso den regelmäßigen Dreistrahl (H. 96), auch durch Überspringen je eines Eckes das regelmäßige Dreieck in zwei Hauptlagen (H. 97) und deren Vereinigung in zwei Ausführungen (H. 98).


Fig. 52.

Schneide sieben gleichgroße regelmäßige Sechsecke aus und lege je an die Seiten eines von ihnen (Fig. 52) die übrigen sechs mit ihren Seiten an; füllen sie alle die Fläche aus? warum? (Arbeit der Bienen! Raumausnützung!)

7. **Ecken des regelmäßigen Vierflächners.** — Anzahl? Art: sie sind dreikantig und gleichkantig. — Benütze ein Drahtmodell und ein gleichgroßes Pappmodell: kann man ein Eck (— dann jedes andere Eck —) des Pappmodells mit jedem Eck des Drahtmodelles zur Deckung bringen? und jedesmal in wievielen Lagen? warum so? — Warum heißt also wohl der betrachtete Körper „regelmäßiger" Vierflächner?

52. Die aufrechte Pyramide auf gleichseitigem Dreieck als Grundfläche.[1])

1. **Aufstellung:** auf welche Arten möglich?

2. **Flächen.** — Anzahl? Verteilung: Grundfläche und Seitenflächen; warum hier eine solche Unterscheidung? (Dagegen beim regelmäßigen Vierflächner?) — Gibt es hier wagrechte Flächen? lotrechte Flächen? parallele Flächen?

3. **Kanten.** — Anzahl? Verteilung: Grundkanten und Seiten- oder Scheitelkanten.

---

1) Zuerst werden Pyramiden benützt, die verhältnismäßig höher sind als der regelmäßige Vierflächner, dann auch solche, die niederer sind [sie sollen hier als gestreckte Pyramiden und als gedrückte Pyramiden unterschieden werden]. Die beiden führen zu zwei Gruppen gleichschenkeliger Dreiecke, deren Übergangsglied das gleichseitige Dreieck ist (H. 99).

Gibt es Kanten, die parallel mit Kanten sind? oder solche, die parallel mit einer Fläche sind?

Miß die Länge von Grundkanten, dann auch die von Seitenkanten zunächst bei einer gestreckten Pyramide (oder bei mehreren) und vergleiche die Kantenlängen miteinander! Ebenso verfahre bei einer gedrückten Pyramide (oder bei mehreren) und vergleiche wiederum die Kantenlängen. Es ergibt sich hierbei als vom gleichseitigen Dreieck zu unterscheiden

4. **Das gleichschenkelige Dreieck.** — Nimm zwei gleichlange Bleistifte und ein drittes verschieden langes und bilde daraus ein Dreieck: Unterscheidung der einen Grundseite und der beiden Schenkel (woher wohl beide Namen?), sowie der Spitze. Zeichne in die Luft ein gleichschenkeliges Dreieck und zwar du eines, dessen Spitze oberhalb, und du eines, dessen Spitze unterhalb der Grundseite liegt! Wer sagt Beispiele vom Vorkommen und von der Verwendung gleichschenkeliger Dreiecke? (Giebeldach, Kirchturm, Winkelscheit, geöffnete Schere, Pfeilspitze, gespannte Schnur mit in der Mitte angehängtem Gewicht [vorzeigen!], u. dgl.) — Wer sieht hier an diesen Mustern das Vorkommen des gleichschenkeligen Dreiecks? Umfahre seinen Umfang! Schätze, dann miß die Seiten, dann berechne den Umfang!

Nun **zeichne** ein gleichschenkeliges Dreieck: Versuch mit dem Maßstab allein — warum gelingt es nicht gut, wenn die Grundseite eine bestimmte Länge erhalten soll? Nun Verwendung von Maßstab und Zirkel (H. 99): wähle als Grundseite $g = 24$ mm und als Schenkel s nacheinander 37 mm, 24 mm, 16 mm! Ferner zeichne in verschiedener Lage (H. 100) drei gleichschenkelige Dreiecke α) mit $g = 0{,}66$ dm und $s = 0{,}36$ dm, ferner β) mit $g = 20$ mm und $s = 20$ mm, endlich γ) mit $g = 2{,}3$ cm und $s = 3{,}5$ cm!

Zeichne auch (H. 101) ein gleichschenkeliges Dreieck mit beliebigem Winkel an der Spitze und mit $s = 4$ cm, endlich auch eines mit R an der Spitze und mit $s = 21$ mm! — Zeichne auch über derselben Grundseite $g = 5$ cm gleichschenkelige Dreiecke mit den Schenkeln = 16, 13, 10, 8, 5, 3, 2,7 cm! (H. 102).

Inwiefern bildet das gleichseitige Dreieck den Übergang von einer Gruppe gleichschenkeliger Dreiecke zu einer anderen Gruppe?

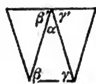


Fig. 53.

Schneide drei gleichgroße gleichschenkelige Dreiecke aus, bezeichne in jedem die entsprechenden Winkel mit α, β, γ, dann lege die drei Dreiecke so, daß die Winkel α, β, γ der einzelnen Dreiecke den Scheitel gemeinsam haben (Fig. 53) und je zwei Schenkel aneinander liegen. Welche Lage haben dann die zwei freien Schenkel? und was ist über die Summe $(\alpha + \beta + \gamma)$ zu sagen?

5. **Falten des gleichschenkeligen Dreiecks.**

a) Die Höhe im gleichschenkeligen Dreieck. — Modelliere aus Papier ein „gestrecktes“ und ein „gedrücktes“ gleichschenkeliges Dreieck (Fig. 54). Dann falte jedes Modell so, daß die Schenkel zur Deckung kommen: ist dies möglich? was geschieht mit dem einen Dreiecksteil? Welche Lage zur Grundseite erhält die Faltungslinie h? Wohin fällt der eine Winkel an der Grundseite? warum muß er den anderen Winkel decken? Also:

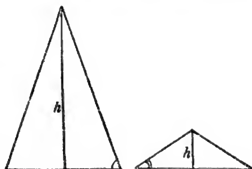


Fig. 54.

„Im gleichschenkeligen Dreieck sind die Winkel an der Grundseite gleichgroß.“

Die von der Spitze auf die Grundseite gefällte Senkrechte heißt die Höhe des gleichschenkeligen Dreiecks. Die Höhe ist zugleich Symmetrieachse der Figur.

Zeichne ein gleichschenkeliges Dreieck (H. 103) aus $g = 18$ mm, $h = 23$ mm und eines aus $h = 0{,}9$ cm, $g = 4{,}4$ cm. Hebe in den beiden Dreiecken die Symmetrieachse durch Farbe hervor!

In welch verschiedener Weise läßt sich ein gleichschenkeliges Dreieck zeichnen?

Hier sollte ein Ausflug in den Schulhof einsetzen, um eine Strecke abzustecken, deren Mitte zu suchen, durch sie mittels Kreuzscheibe die zur Strecke Mittelsenkrechte zu finden und dann für einige angefügte beliebig gewählte gleichschenkelige Dreiecke die Gleichheit der Schenkel durch Messen zu bestätigen.

b) **Das rechtwinkelige Dreieck.** — Die in a) gefalteten Modelle zerschneide längs der Achse. Jede Hälfte heißt ein rechtwinkeliges Dreieck (Fig. 55); zwei seiner Seiten sind die zwei kleineren oder Katheten (a und b), die dritte ist die größte (c), nämlich die dem R gegenüberliegende Seite oder die Gegenseite des rechten Winkels; sie heißt auch Hypotenuse.

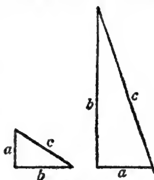


Fig. 55.

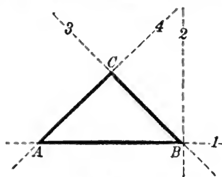


Fig. 56.

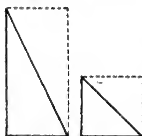
Anmerkung. Es dürfte sich hier empfehlen, (wenigstens gewandteren Schülern) das Anfertigen eines rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreiecks durch Falten zu zeigen (nach Nr. 134, S. 138) — in folgender Art (Fig. 56):

Falte die Gerade 1 und wähle darauf AB als größte Seite des gewünschten Dreiecks. Falte dann durch B die 2 senkrecht zu 1, knicke bei B und lege 2

auf 1, so wird der rechte Winkel bei B halbiert durch 3; darauf falte noch durch A zu 3 die Senkrechte 4, so ist das Dreieck ABC das gewünschte.

Zeichne ein rechtwinkeliges Dreieck aus: 1) $a = 3$ cm und $b = 1{,}5$ cm (H. 104); 2) $a = 34$ mm und $c = 37$ mm (H. 105); 3) $c = 0{,}38$ dm und $b = 0{,}33$ dm (H. 106); dann miß jedesmal die fehlende Seite!

Modelliere ein Rechteck und ein Quadrat und zerschneide jedes längs einer Eckenlinie; in welche Teile zerfällt jede Figur? (Fig. 56a). Welcher Unterschied besteht zwischen beiden Arten von Teilstücken?


Fig. 56 a.

6. Im Rechteck (H. 107) sind die Eckenlinien gleichgroß und halbieren einander (S. 141, § 46, 5), also ist $MC = MA = MB$. Wenn aber dies der Fall ist, so ist im rechtwinkeligen Dreieck (H. 108) der Scheitel des R von der Mitte M der größten Seite um deren Hälfte entfernt, also läßt sich um M ein Kreis beschreiben, der durch die Ecken des Dreiecks geht. Also:

„Um jedes rechtwinkelige Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt die Mitte der größten Seite ist.“

7. **Bilden neuer Formen.** — Modelliere je zwei gleichschenkelige Dreiecke (Fig. 57) und zwar das erste Paar (a) mit je einem spitzen Winkel der Grundseite gegenüber, das zweite Paar (b) mit je einem rechten Winkel, das dritte Paar (c) mit einem stumpfen Winkel an der „Spitze“. Dann lege je zwei gleiche mit der Grundseite aneinander (Fig. 55, I), dann auch mit einem Schenkel (II), dann auch verdreht mit einem Schenkel (III). Welcherlei neue Figuren entstehen so? (Vgl. § 6, 6 d und Fig. 32 u. 33.)

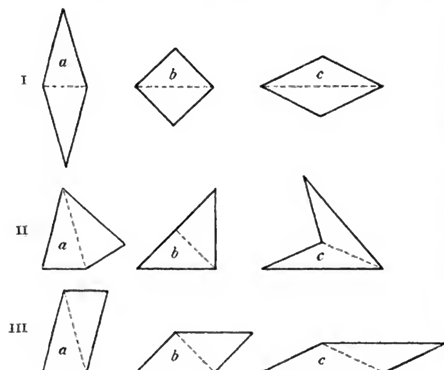


Fig. 57.

Gib Beispiele an, wo diese neuen Figuren („Vierecke“) auftreten! — Suche auch das Vorkommen einzelner von ihnen an den hier aufgehängten (vorgelegten) Mustern auf!

8. **Parallele Geraden.** — a) Welche Lage haben wohl in den Vierecken I und III der Fig. 57 die Gegenseiten? Um parallele Geraden zu zeichnen, kann man nach Art der Fig. 10 u. 11 (S. 127) oder der Fig. 58 verfahren, insbesondere wenn man durch zwei Punkte A und B beliebige Parallelen oder wenn man zu einer gegebenen Geraden a durch einen gegebenen Punkt B die Parallele zeichnen soll.

b) Zeichne (mit verschiedener Benützung des Winkelscheites) einige wagrechte Parallelen, lotrechte, schiefe (H. 109), solche durch zwei gegebene Punkte A und B, auch eine solche b, die mit einer Geraden a parallel ist und zugleich durch einen gegebenen Punkt C geht.

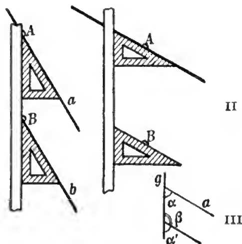


Fig. 58.

Die mit a parallele Gerade (Fig. 58, III) entsteht dadurch, daß $\sphericalangle\, \alpha$ längs der schneidenden Geraden g verschoben wird in die neue Lage α'; weil aber $\sphericalangle\, \alpha' + \beta = 2R$, so muß auch $\alpha + \beta = 2R$ sein, d. h.

Wenn zwei Parallelen von einer Geraden („Querlinie“) geschnitten werden, so beträgt die Summe der zwei Winkel, die zwischen den Parallelen einerseits der Querlinie liegen, genau 2R.

9. **Parallelogramm.** — Durchschneide ein Paar Parallelen durch ein anderes Paar Parallelen! (H. 110).

Wird ein Paar Parallelen durch ein anderes Paar durchschnitten, so entsteht ein Viereck, und dieses heißt ein Parallelogramm (Pgr.). Seine Seiten und seine Winkel zusammen heißen auch die „Stücke“ der Figur. („Stücke“ des Dreiecks?!)

Zeichne ein Pgr., von dem zwei Nachbarseiten 12 und 23 mm lang sind und 1) einen schiefen Winkel (H. 111, I) oder 2) einen R einschließen (H. 111, II), ebenso 3) wenn zwei Nachbarseiten gleichgroß, nämlich = 15 mm sein sollen, während ihr Zwischenwinkel entweder ein schiefer (H. 111, III) oder 4) ein R ist (H. 111, IV)! — Miß stets die übrigen zwei Seiten und vergleiche sie mit den gegebenen!

Wieviele „Stücke“ hat ein Pgr.? Wieviele Stücke müssen zum Zeichnen eines Pgr. bekannt sein? Wieviele (und welche) anderen Stücke ergeben sich dann von selbst? Warum ergeben sich diese als ganz bestimmt? [Wie läßt sich jetzt das Quadrat auch anders als früher (H. 44) zeichnen?]

Die vier Arten von Parallelogrammen (H. 111) haben die Namen: Quadrat, Raute, Rechteck, Rautling.

c) Inwiefern ist das Quadrat eine besondere Art des Rechtecks? inwiefern ist das Quadrat eine besondere Art der Raute? — Modelliere mehrere Rauten verschiedener Gestalt und falte sie wie das Quadrat (vgl. S. 131). Ergebnisse?

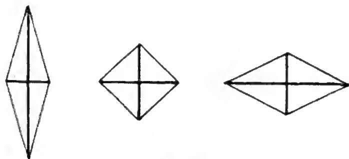


Fig. 59.

Die Entstehung der Raute (s. Fig. 57, S. 154) aus dem gleichschenkeligen Dreieck lehrt zugleich folgenden Lehrsatz (Fig. 59):

Die Eckenlinien der Raute halbieren einander, stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel der Raute.

Hiervon macht man Anwendung zur Zirkel-Lösung der folgenden Aufgaben[1]):

1) Eine gegebene Strecke AB zu halbieren (H. 112, a).

2) Zu einer Strecke UV die Mittelsenkrechte zu errichten (H. 112, b).

3) Auf eine Gerade g durch einen Punkt A außer ihr die Senkrechte zu fällen (H. 112, c).

4) Einen gegebenen Winkel W zu halbieren (H. 112, d).

d) Auf Grund der letzten Aufgabe (Nr. 4) läßt sich nun auch zum Quadrat über Eck das Quadrat in Grundlage, sowie der regelmäßige Vierstrahl und Achtstrahl und das regelmäßige Achteck zeichnen (H. 114, 115, 116, 117 — vgl. H. 95—98).

10. **Ecken der Pyramide.** — Anzahl? Arten: alle dreikantig, aber ...? — Läßt sich das Scheiteleck mit einem der Grundecken wohl zur Deckung bringen? oder vielleicht das Scheiteleck oder ein Grundeck mit einem der Ecken der vorher betrachteten eckigen Körper? Warum nicht?

11. **Netz der Pyramide.** — Entstehenlassen (vgl. S. 134) und Zeichnen des Netzes sowohl in der einen als in der anderen Form (H. 113, I u. II).

Anhang (zur Übung). Die gerade Pyramide auf quadratischer Grundfläche.

---

1) Eine schöne und anregende Verwendung bietet hier die von Streit angeregte sog. Rautengeometrie [H. Z. 24 (1893), S. 321—326], deren einfachsten Fälle wenigstens praktisch ausgeführt werden dürften.

53. Der aufrechte Kreiskegel.

1. **Flächen.** — Anzahl, Arten? Erproben der krummen Fläche durch das Lineal (vgl. S. 143, § 49, 2)!

Bei welcher Aufstellung sieht man bloß die Grundfläche? bei welcher bloß die Mantelfläche und zwar teilweise? oder ganz? oder gar nicht?

2. **Kanten und Ecken.** — Achse [Vorzeigen des schiefen Kreiskegels als Gegenstück!]

3. **Netz.** — Entstehenlassen durch Abrollen; Mit- und Nachzeichnen. Vorzeigen des fertigen Netzes, dann probieren lassen, ob es die Schüler aus eigener Kraft fertig bringen!

4. **Kreisausschnitt,** zu ergänzen zur vollen Kreisscheibe, erläutert am Uhrmodell mit Vollwinkel und Teil des Vollwinkels.

Zeichne und modelliere dann (H. 118) einen a) Halbkreis, b) Viertelskreis, c) Dreiviertelskreis, d) Achtelskreis, e) Sechstelskreis, f) Drittelskreis, g) Zweidrittelskreis, h) Fünfsechstelskreis! Hierauf forme daraus stets einen Kegel (ohne zusammenzukleben)!

Welche Teile des Vollwinkels sind die am Mittelpunkt der gezeichneten Kreisausschnitte entstandenen Winkel?

5. **Winkel von beliebiger Größe.** — Zuerst Wiederholung der Entstehung des Winkels am Uhrmodell; darauf Zeichnen eines Kreises von mindestens 8 cm Halbmesser (H. 119) und Einteilen desselben in 4 und 6, also 12 gleiche Teile, hierauf Ziehen der 12 Halbmesser und Halbieren eines Winkels und (n. A. oder m. Z.) Fünfteilen einer seiner Hälften. Somit Einteilen des Vollwinkels in $10 \cdot 12 = 120$ Teile und schließlich Einteilung in 360 Grad [zum Teil ausführen] und damit Einteilung des R in 90 Grad.[1])

6. **Winkelmesser.** — Zeichne einen solchen! (H. 120). — Anleitung zum Gebrauch.

Aufgaben:

a) Zeichne einen Winkel von 35^0, 74^0, 60^0, 140^0, 25^0 bei verschiedenen Lagen des ersten Schenkels! (H. 121). Müssen hierbei die Schenkel gleichlang gemacht werden?

b) Zeichne mehrere Winkel von verschiedener Lage und Größe; dann schätze und miß sie! (H. 122).

c) Ein gezeichneter Winkel *w* soll an einen Halbstrahl (an eine Gerade) angetragen werden sowohl mittels gefalteten Papieres, als auch mit Winkelmesser (m. Wm.) und mit dem Zirkel! (H. 123).

---

1) Die Unterabteilung in Minuten und Sekunden bleibt auf dieser Stufe ganz weg.

d) Man soll mit verschiedenen Hilfsmitteln Winkel addieren (H. 124—127), subtrahieren (H. 128 u. 129), multiplizieren (H. 130) und teilen (H. 131).[1])

e) Zeichne eine Raute, deren Seite = 13 mm und deren einer Winkel = 111° ist (H. 132).

f) Zeichne ein Rechteck, in dem die Eckenlinie = 4 cm und der Winkel *w* zwischen den Eckenlinien = 29° sein soll (H. 133).

g) Zeichne einen beliebigen Winkel *w*; dann verlängere seinen einen Schenkel (— welchen? —) über den Scheitel hinaus. Was entsteht so? (H. 134). — Wie gewinnt man zu einem Winkel einen seiner Nebenwinkel? Miß jeden der entstehenden Nebenwinkel! Warum müssen die beiden neu entstandenen Nebenwinkel gleichgroß sein? Erkläre den Lehrsatz:

„Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 2 R (oder 180°)."

h) Zeichne einen beliebigen Winkel *w* (H. 135); dann verlängere jeden der Schenkel über den Scheitel hinaus. Wieviele neue Winkel entstehen? Welcher ist zu ∢ *w* kein Nebenwinkel? Miß ∢ *w* und miß auch diesen vierten Winkel *x*! Winkel wie *w* und *x* heißen ein Paar Scheitelwinkel. — Wie gewinnt man zu einem Winkel seinen Scheitelwinkel? Erkläre den Lehrsatz:

„Zwei Scheitelwinkel sind gleichgroß."

54. Die dreiseitige Pyramide auf beliebigem Dreieck.

1. **Aufstellung?**

2. **Flächen:** Grundfläche und Seitenflächen, sämtlich Dreiecke. — Welche Arten von Dreiecken kamen bis jetzt vor? An welchen Körpern (Figuren) kamen die soeben genannten besonderen Arten von Dreiecken vor? Zeichne sie nebeneinander! Zeichne jetzt auch ein ungleichseitiges Dreieck! (H. 136).

3. **Kanten:** Grundkanten und Seitenkanten (oder Scheitelkanten).

4. **Ecken:** Grundecken und Scheiteleck (oder Spitze). — Wievielkantig ist jedes Eck? Läßt sich wohl ein abgeschnitten gedachtes Eck mit einem anderen zur Deckung bringen?

5. **Beliebiges Dreieck.**

a) Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 20$, $b = 18$, $c = 12$ mm (H. 137); dann versuche eines zu zeichnen mit den Seiten $a = 20$,

---

1) Die von Bolze (H. Z. 9 [1878], S. 193) ausgesprochene, aber durch Schlömilch (ebenda S. 427 ff.) abgefertigte Meinung, „man müsse einen Winkel erst halbieren können, bevor man mit halben Winkeln umgehen darf", gilt sicherlich für keine Stufe des Unterrichts, wie Schlömilch überzeugend nachweist.

$b = 8$, $c = 12$ mm; ebenso eines mit den Seiten $a = 20$, $b = 6$, $c = 11$ mm. Was ergibt sich?

„Die Summe zweier Seiten des Dreiecks muß größer sein als die dritte Seite." (Warum?)

b) Zeichne zwei verschieden gestaltete ungleichseitige Dreiecke (H. 138 u. 139); dann schätze und miß die Seitenlängen! (Fehler?) Ferner schätze und miß auch die Winkel in Graden! (Fehler?) — Welcher Winkel ist der größte? der kleinste? Wie liegen diese in bezug auf die verschieden großen Seiten?

c) Versuche Dreiecke zu zeichnen (H. 140) mit den Winkeln 1. 60^0, 80^0, 50^0; 2. 60^0, 120^0, 15^0; 3. 60^0, 130^0, 20^0; 4. 60^0, 70^0, 50^0! — Ergebnis der Versuche?!

Durch zwei Winkel des Dreiecks muß wohl dessen dritter Winkel bestimmt sein.

d) Zeichne das Dreieck aus zwei Seiten $a = 32$ mm, $b = 21$ mm und ihrem Zwischenwinkel $\gamma = 55^0$ sowohl nach dem Augenmaß (H. 141, I) als auch mehrmals mit Maßstab und Zirkel (H. 141, II—V). Dann miß jedesmal die Länge der dritten Seite c!

Ebenso zeichne ein Dreieck aus den zwei Seiten $b = 40$ mm, $c = 20$ mm und aus deren Zwischenwinkel $\alpha = 119^0$ (H. 142, I, II, III). Dann schätze zuerst jedesmal die drei fehlenden „Stücke", darauf miß diese!

e) Zeichne das Dreieck aus einer Seite $a = 32$ mm und aus deren beiden anliegenden Winkeln („Anwinkeln") $\beta = 40^0$ und $\gamma = 70^0$ und zwar ebenfalls zuerst nach dem Augenmaß; dann (H. 143) möglichst genau. Schätze zuerst, dann miß die fehlenden Stücke!

Ebenso das Dreieck (H. 144) aus einer Seite $a = 44$ mm und aus den Anwinkeln $\beta = 21^0$ und $\gamma = 110^0$!

f) Aus welcher geringen Anzahl gegebener Stücken eines Dreiecks kann man also wohl das vollständige Dreieck zeichnen?

6. Winkelsumme beim Dreieck.

a) Zeichne ein Dreieck aus 3 Seiten (etwa 12, 14, 16 cm lang), verbinde zwei Seitenmitten A und B (Fig. 60a) und falte längs AB; dann kommt ∢ 1 nach α. Die ungedeckten Teile des Dreiecks sind gleichschenklige Dreiecke (— warum? —). In ihnen zieht man die Höhen und faltet längs dieser; was wird eintreten? wohin kommt ∢ 2 zu liegen? und wohin kommt ∢ 3? Wie liegen nun die Winkel α, β, γ? Gilt, was hier verdeutlicht und

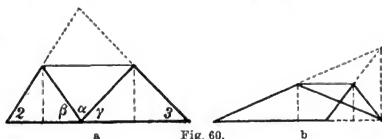


Fig. 60.

nachgewiesen wurde, nur für dieses benützte Dreieck? oder für jedes? auch für ein Dreieck von der Gestalt wie Fig. 60b? — Also Lehrsatz:

„Die Summe der (inneren) Winkel eines Dreiecks beträgt 2 R oder 180°.

Auf zweite Art wird dieser Satz folgendermaßen veranschaulicht: Zeichne ein Dreieck (modelliere es aus Stäbchen) und fälle (Fig. 61) von einem Punkte P im Inneren aus die Senkrechten auf die Seiten a, b, c; dann drehe a um P bis zum Zusammenfallen mit b, d. h. um den $\sphericalangle \gamma$, oder, was dasselbe ist, um den $\sphericalangle \gamma'$, darauf drehe b um P bis zum Zusammenfallen mit c, d. h. um den $\sphericalangle \alpha$ oder, was dasselbe, um den $\sphericalangle \alpha'$, endlich c um P um den $\sphericalangle \beta$ oder um β'. Nun ist $\sphericalangle \alpha' + \beta' + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma = 4R$, und da die 3 zusammengehörigen Außenwinkel mit den Innenwinkeln zusammen $= 6$ R ausmachen, so ist die Summe der Innenwinkel $= 2$ R.

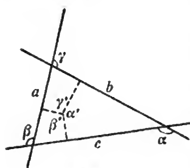


Fig. 61.

Hier schiebt sich ein Ausflug in den Hof ein, bei dem ein Theodolitmodell zur Verwendung kommt: es wird ein Dreieck abgesteckt und dessen Winkel werden gemessen (zweimal!); auch die Seiten werden gemessen (zweimal!) und das Dreieck wird darauf im Zimmer (Hausaufgabe!) gezeichnet, und in der verschiedentlich verkleinerten Nachbildung werden dessen Winkel gemessen. Probe?!

b) Zeichne (zur Übung) mehrere beliebige Dreiecke (H. 145); dann schätze ihre Winkel, hierauf miß diese möglichst genau und addiere ihre Gradzahlen! Ergibt die Summe stets $= 180°$? Warum nicht stets so?

Ferner zeichne ein Dreieck mit den zwei Winkeln 52° und 25° in verschiedenen Lagen (H. 146). Miß dann stets den dritten Winkel! Berechne auch seine Größe! Stimmen Messung und Rechnung miteinander? Warum nicht immer?

c) Erprobe auch an früher gezeichneten Dreiecken (z. B. H. 138, 139, 141, 142), ob die Winkelsumme 180° ergibt!

d) Der eine Winkel α eines Dreiecks sei $= 34°$; zeichne verschiedene Dreiecke dazu (H. 147), miß die übrigen zwei Winkel und prüfe, ob sich deren Summe tatsächlich $= 146°$ ergibt!

Ebenso, wenn der gegebene Winkel des Dreiecks $= 80°$ ist (H. 148); ergibt sich dann stets als Summe der zwei anderen Winkel genau 100°?

e) Wie groß ist der dritte Winkel eines Dreiecks, wenn die ersten zwei folgende Größen haben: 49° und 102°? 39° und 54°? 16° und $28\frac{1}{2}$°? 94° und 89°? 116° und 79°?

f) In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Nebenwinkel n des Winkels an der Spitze $= 132°$ und der Schenkel $= 23$ mm [oder $= 64°$ und 41 mm]; man soll die drei Winkel des Dreiecks berechnen

und das Ergebnis an der Figur erproben! (H. 149 u. 150). Miß auch die dritte Seite!

7. **Bilden neuer Formen.** — Modelliere zwei deckungsfähige ungleichseitige Dreiecke, bezeichne je die gleiche Oberseite mit demselben Zeichen, dann lege sie je mit den gleichen Seiten aneinander (Fig. 62). (Vgl. S. 150, Fig. 48 und 49 und Fig. 57, S. 154 und S. 161.) Auf wieviele Arten ist dieses Aneinanderlegen möglich? Welcherlei Figuren entstehen dabei? (Fig. 62, I u. II).

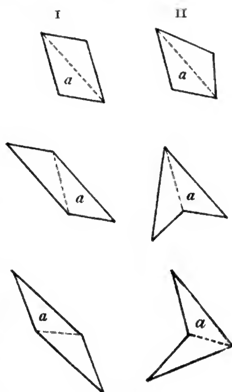


Fig. 62.

55. Der Pyramidenstumpf.

1. Eine aufrechte (Voll-) **Pyramide** auf regelmäßig dreiseitiger und eine auf regelmäßig vierseitiger Grundfläche werden aufgestellt; durch sie wird ein zur Grundfläche paralleler Schnitt gelegt gedacht, und die Figur des Schnittes wird erfragt. Darauf werden zwei mit den vorigen gleichgestaltete Pyramiden betrachtet, die tatsächlich in Pyramidenstumpf und Ergänzungspyramide zerlegt werden können. Die Flächen der Pyramidenstumpfe werden betrachtet, insbesondere die Seitenflächen, die gleichschenklige Trapeze sind.

2. **Trapez.** — a) Gleichschenkeliges Trapez: Beispiele (Scheiben von Straßenlaternen, Seitenflächen von Straßenprellsteinen, ...)? Zeichnerisches Entstehenlassen aus dem gleichschenkligen Dreieck; Besitz einer Symmetrieachse (H. 151). Zerlegen entweder in ein Parallelogramm und in ein gleichschenkliges (warum?) Dreieck oder in ein Rechteck samt zwei rechtwinkligen Dreiecken (H. 152).

Zeichne ein gleichschenkliges Trapez, bei dem die eine Parallelseite = 2,9 cm, die anliegenden Winkel = 50° und die eine schiefe Seite = 13 mm ist; dann miß die übrigen „Stücke" der Figur (H. 153)! — Ebenso, wenn die entsprechenden Größen = 16 mm, 118°, 14 mm sind! (H. 154).

Zeichne ein gleichschenkliges Trapez, dessen Achse = 29,5 mm und dessen Parallelseiten = 9 mm und 31 mm sind. Miß die Länge der schiefen Seiten und die Winkel des Trapezes, auch die Seitenlängen des Ergänzungsdreieckes! (H. 155).

b) Ungleichschenkliges Trapez: Entstehenlassen aus dem ungleichseitigen Dreieck. Ergänzung zum Dreieck; Zerlegung (wie in a).

Zeichne ein ungleichschenkliges Trapez aus einer Parallelseite = 3,7 cm, aus den anliegenden Winkeln = 35° und 80° und aus der den ∢ 35° mitbildenden Schiefseite = 2,5 cm (H. 156). — Ebenso, wenn die entsprechenden Größen sind = 9 mm, 115° und 142° und 16 mm! (H. 157).

56. Das Viereck.

Zeichne ein Viereck $ABCD$, wenn von ihm bekannt ist:

a) $AB = 15$ mm, $BC = 13$ mm, $CD = 17$ mm, $DA = 28$ mm und $\sphericalangle A = 54\frac{1}{2}^0$ (H. 158);

b) $AB = 16$ mm, $BC = 29$ mm, $CD = 12$ mm und $\sphericalangle B = 69^0$, $\sphericalangle C = 79^0$ (H. 159);

c) $CD = 13$ mm, $DA = 11$ mm und $\sphericalangle A = 90^0$, $\sphericalangle C = 60^0$, $\sphericalangle D = 134^0$ (H. 160).

Schätze, dann miß die fehlenden Stücke! Insbesondere berechne die Summe der (inneren) Winkel des Vierecks und prüfe, ob sie sich gleich 4 R (oder 360°) ergibt.

57. Länge der Kreislinie.

a) Hier habe ich eine fingerdicke Kreisscheibe aus Holz; miß deren Durchmesser! — Jetzt mache ich am Umfang irgendwo ein Zeichen, setze hier die Scheibe auf eine bezeichnete Stelle A des Tisches auf und rolle sie darauf hin, bis jene bezeichnete Stelle wieder auf den Tisch zu liegen kommt, etwa bei B. Miß jetzt die Strecke AB! — Anstatt die Scheibe abzurollen, könnte man die Länge ihres Umfanges wohl auch anders finden, wohl wie? — Nun, so umfahre du mit dieser Schnur die Scheibe und miß die Schnurlänge am Maßstab und zwar Durchmesser d und Umfang u dieser Scheibe in Zentimetern und schreibe auf, was du findest, aber behalte es für dich! Miß beides auch du, zweiter, in Millimetern, und auch du, dritter, ebenfalls in Millimetern; aber nachher erst sagt ihr, was ihr gefunden habt. Also ihr drei fandet:

$$d_1 = 10 \text{ cm}, \ u_1 = 32 \text{ cm}; \qquad d_2 = 99 \text{ mm}, \ u_2 = 318 \text{ mm};$$
$$d_3 = 99 \text{ mm}, \ u_3 = 317 \text{ mm}.$$

Wievielmal so lang ist u als d? Wie berechnet man das? Also es findet sich:

$$\frac{u_1}{d_1} = 3\tfrac{1}{5}; \qquad \frac{u_2}{d_2} = 3\tfrac{7}{33}; \qquad \frac{u_3}{d_3} = 3\tfrac{20}{99}.$$

Sind diese Zahlwerte bequem miteinander vergleichbar? Wie können wir sie bequemer und übersichtlicher vergleichbar machen? Gut, so wollen wir jene Werte in Dezimalbruchform bringen (— und sollen

wir wohl auf 4 oder 5 Stellen nach dem Komma ausrechnen? warum dies nicht? —) wir finden:

3,200; 3,212; 3,202 (also verschieden!).

Wer von den dreien hat nun recht? wer hat mehr recht? was ist jetzt „richtig"? Wie werden wir denn den „richtigen" Wert finden? Etwa, indem wir noch 6, 8, 20 andere d und u an dieser selben Scheibe nachmessen lassen?

b) Hier habe ich noch eine kleinere [oder noch eine größere] kreisrunde Holz- (oder Metall-)scheibe. Auch für die kleinere soll das entsprechende Messen und Rechnen dreimal ausgeführt werden; es findet sich:

$$\frac{u_1}{d_1} = \frac{22\text{ cm}}{7\text{ cm}} = 3{,}143; \quad \frac{u_2}{d_2} = \frac{222\text{ mm}}{70\text{ mm}} = 3{,}171; \quad \frac{u_2}{d_3} = \frac{223\text{ mm}}{71\text{ mm}} = 3{,}141.$$

Ebenso verfahren wir mit der dritten Scheibe und finden:

$$\frac{u_1}{d_1} = \frac{47{,}5\text{ cm}}{15\text{ cm}} = 3{,}167; \quad \frac{u_2}{d_2} = \frac{47{,}3\text{ cm}}{14{,}9\text{ cm}} = 3{,}174; \quad \frac{u_3}{d_3} = \frac{476\text{ mm}}{149\text{ mm}} = 3{,}195.$$

Immer kommt auffallenderweise ein Zahlwert heraus, der zwischen 3 und 4 liegt; muß das so sein?

Zur Aufklärung wollen wir zwei von früher (S. 151 und 131) her bekannte Figuren zeichnen (Fig. 63), nämlich ein einem Kreise eingeschriebenes regelmäßiges Sechseck und ein einem gleichgroßen Kreise umgeschriebenes regelmäßiges Viereck.

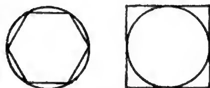


Fig. 63.

Wenn der Durchmesser des Kreises jedesmal die Länge $= d$ hat wie lang ist die Sechseckseite? $\left(= \frac{d}{2}\right)$. Also der Umfang des Sechsecks? Antwort: er ist $= 6 \cdot \frac{d}{2}$, d. h. $= 3 \cdot d$.

Anderseits wie groß ist die Seite des Vierecks? $(= d)$. Also der Umfang des Vierecks? Antwort: er ist $= 4 \cdot d$.

Die Kreislinie ist offenbar länger als der Umfang des Sechsecks, also $> 3 \cdot d$, aber zugleich kürzer als der Umfang des Vierecks, er ist also $< 4 \cdot d$; die Länge der Kreislinie liegt somit zwischen dem Dreifachen und dem Vierfachen des Durchmessers, d. h. es muß das stattfinden, was vorhin unsere 9 Messungen und Rechnungen übereinstimmend gezeigt haben.

c) Als Hausaufgabe mißt jeder an drei verschiedengroßen[1]) kreisrunden Gegenständen d und u und berechnet (in gewöhnlichen

1) Zumal bei kleineren Gegenständen (Münzen u. dgl.) ist es ratsam, die Schnur oder den Faden, die man zum Umlegen benützt, naß zu machen.

Brüchen und in Dezimalbruchform) jedesmal die wiederholt gesuchte Verhältniszahl, die man allgemein mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet. So findet sich z. B. für

	d	u	
Trinkglas	6,9 cm	22 cm	also $\pi = \frac{220}{69} = 3\frac{13}{69}$ oder $= 3{,}188$
Waschschüssel . . .	$46\frac{1}{2}$ cm	116 cm	" $\pi = \frac{232}{93} = 3\frac{53}{93}$ " $= 3{,}569$[1]
Suppenteller.	23,4 cm	73,8 cm	" $\pi = \frac{738}{234} = 3\frac{18}{117}$ " $= 3{,}154$
Kaffeetasse	8,7 cm	27,5 cm	" $\pi = \frac{275}{87} = 3\frac{14}{87}$ " $= 3{,}161$
Fahrrad (kleines Rad)	66 cm	206,8 cm	" $\pi = \frac{2068}{66} = 3\frac{2}{15}$ " $= 3{,}133$
Fahrrad (großes Rad)	71 cm	224 cm	" $\pi = \frac{224}{71} = 3\frac{11}{71}$ " $= 3{,}155$
Fünfmarkstück . . .	38 mm	123 mm	" $\pi = \frac{123}{38} = 3\frac{9}{38}$ " $= 3{,}237$
Zweimarkstück . . .	$27\frac{1}{2}$ mm	87 mm	" $\pi = \frac{87}{27\frac{1}{2}} = 3\frac{9}{55}$ " $= 3{,}165$
Einmarkstück	$23\frac{1}{2}$ mm	$77\frac{1}{2}$ mm	" $\pi = \frac{155}{47} = 3\frac{14}{47}$ " $= 3{,}298$
Fünfzigpfennigstück	$19\frac{1}{2}$ mm	64 mm	" $\pi = \frac{128}{39} = 3\frac{11}{39}$ " $= 3{,}282$

u. dgl.

Genauere Berechnung zeigt, daß man folgende Festsetzung zu machen hat:

Angenäherter Wert von $\pi = 3\frac{1}{7}$ oder $\frac{22}{7}$ oder 3,14.

d) Rechenaufgaben.

1. Wenn der Halbmesser einer kreisrunden Fahrbahn 116 m beträgt, wie lang ist die Fahrbahn?

Antwort: Für $\pi = \frac{22}{7}$ (3,14) ist die Länge $= 729\frac{1}{7}$ m (bzw. $= 728{,}48$ m).

2. Die Länge eines Kilometers ist so gewählt worden, daß eine Großkreislinie der Erdkugel die Länge $= 40000$ km beträgt. Wie groß ist hiernach der Halbmesser der Erdkugel?

Antwort: Für $\pi = \frac{22}{7}$ (3,14) findet sich die Halbmesserlänge $= 6363\frac{1}{2}$ km (bzw. 6369,4 km).

II. Flächeninhalt ebener Figuren.

58. Das Flächenmaß.

1. Zeichne, dann modelliere ein Quadrat, von dem jede Seite 1 dm lang ist (H. 161): es heißt ein Quadratdezimeter (= 1 qdm). — Lege 1 qdm so oft als möglich auf eine Fensterscheibe (oder auf die Bankfläche), um sie zu bedecken, und zähle ab, wievielmal (annähernd) das möglich ist.

---

1) Woher wohl die beträchtliche Abweichung?

Hier ist ein qdm in Holz; lege ihn auf die Wandtafel in deren eines Eck und umfahre ihn; dann trage ihn längs der Kante so oft als möglich an. Wievielmal ist das möglich, wenn jene Kante 12 dm lang ist? Grenze den betr. Streifen durch Kreide ab; wieviele solche Streifen sind auf der Tafel möglich, wenn die Tafel = 11 dm hoch ist? Also wieviele qdm hat die Tafelfläche?

Gib mit dem Finger die Zerlegung der Fensterscheibe in qdm an, wenn sie 6 dm hoch und 4 dm breit ist! — Ebenso bei der Zimmertüre, wenn du deren Höhe = 20 dm und deren Breite = 12 dm abgemessen hast! (Zeichne du die beiden ebengenannten Dinge verkleinert an die Tafel!) Wieviele qdm enthält also die Fensterscheibe? wieviele die Zimmertüre? wieviele ...? ...?

2. Zerlege den qdm (H. 161), ebenso das Modell in zehn Streifen und einen solchen Streifen durch passende Querlinien (Querschnitte) in zehn kleinere Figuren. Welcher Art sind diese?

Nun zeichne (H. 162) ein Quadrat, von dem jede Seite 1 cm lang ist: es heißt ein Quadratzentimeter (= 1 qcm). Wieviele solche enthält einer der vorigen Streifen? also wieviele der qdm?

Ein Quadratdezimeter hat 100 Quadratzentimeter.

Probiere durch Auflegen, ob einer deiner Fingernägel etwa 1 qcm groß ist!

Umfahre nun auf dem eingeteilten qdm (H. 161) an verschiedenen Stellen Flächenstücke, die 6 qcm (oder 15 oder 30 qcm) groß sind!

Zeichne nun ein Rechteck (H. 163), das 3 cm lang und 1 cm breit ist; wieviele qcm enthält es? Ebenso ein Rechteck, das 3 cm lang und 2 cm breit ist (H. 164); ebenso eines mit den Seiten 5 cm und 3 cm (H. 165). Wieviele qcm hat jedes? warum soviele?

[Hier sind Übungen einzuschalten über das Verwandeln von qdm in qcm und umgekehrt, sowie über das „Rechnen" mit solchen Flächenmaßen[1])].

3. Zeichne 1 qcm und zerlege ihn (H. 166) entsprechend dem vorigen! Wieviele Streifen zuerst? dann wieviele kleine Quadrate? Jedes heißt ein Quadratmillimeter (= 1 qmm).

Ein Quadratzentimeter hat 100 Quadratmillimeter.

Zeichne ein Rechteck (H. 167), das 53 mm lang und 1 mm breit ist! Wieviele qmm enthält es? Ebenso bei 53 mm Länge und 11 mm Breite! (H 168). — Schätze nach A., wieviele qmm eine Zeile dieses

---

1) Z. B. nach des Verfassers „Übungsbuch für den Rechenunterricht an Mittelschulen" (3. Auflage, Lahr, M. Schauenburg, 1905), Teil II, S. 95 f. und S. 99 f.

Buches hat! Dann miß und rechne! Wieviele qmm haben 3 vollbedruckte Seiten dieses Buches?

[Hier folgen Verwandlungen wie im erwähnten Rechenbuch S. 95f. und Rechnungen wie S. 100ff.]

4. Zeichne jetzt an die Tafel ein Quadratmeter (= 1 qm): ein qm hat 100 qdm [1]).

Bestimme erst durch Abschätzen, dann durch Abmessen an der Wand (oder auf dem Boden) ein Rechteck, das 3 m lang und 1 m breit ist, ebenso eines, das 4 m lang und 2 m breit ist! wieviele qm enthält jedes dieser Rechtecke?

[Nun Verwandlungen wie im erwähnten Rechenbuch S. 96f. und Rechnungen wie S. 100ff.].

5. Schreite, dann miß auf dem Schulhof ein Quadrat ab, von dem jede Seite 10 m lang ist. Wieviele qm hat dessen Fläche?

Eine Fläche von 100 qm heißt **ein Ar** (= 1 a)[2]); die Fläche von 100 Ar heißt **ein Hektar** (= 1 ha).

6. Umfahre in der Nähe deines Wohnortes in Gedanken ein Quadrat, von dem jede Seite 1 km lang ist! oder von dem jede Seite 1 Meile lang ist!

Welche Fläche nennt man einen Quadratkilometer (= 1 qkm)? welche Fläche heißt eine Quadratmeile?

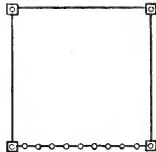
[Hier folgen entsprechende Übungen, auch auf der Landkarte!]

59. Der Inhalt des Rechtecks.

1. Wie wurde bei den Rechtecken der Figuren H. 163 bis 168 die Maßzahl für den (Flächen-) Inhalt gefunden? Zeichne nun auch ein Rechteck, das 8 cm lang und 7 mm breit ist (H. 169); dann auch eines (H. 170), dessen Länge und Breite 1 dm und 13 mm

---

1) Jede Schulsammlung sollte auch ein Quadratmeter-Modell besitzen; denn es genügt nicht, „eine Kreidezeichnung auf dem Fußboden", als ob diese „besser als jede fertige Tafel die Beziehungen zwischen den Einheitsmaßen ad oculus demonstrierte" (Gille in Lehrproben 79, S. 96).


Fig. 64.

2) Allen Schulen möchte ich zur Nachahmung empfehlen, falls es noch nicht besteht, was ich für die Schüler unserer Anstalt (nicht nur, sondern für die ganze Öffentlichkeit) ausführen ließ, um die Vorstellung eines Ar fest zu begründen und dauernd erneuter Anschauung vorzuführen (Fig. 64): nach dem Beispiel nebenstehender Figur habe ich auf der Straße, vor dem Eingang zum Schulhaus die Ecken eines Arquadrates durch kräftigere Steine andeuten lassen und habe auf einer seiner Seiten die 10 einzelnen Meterstrecken durch 9 zwischengesetzte etwas kleinere Steine begrenzen lassen.

beträgt! Wie wird bei diesen die Inhalts-Maßzahl berechnet? Warum so?

Die Maßzahl für den (Flächen-) Inhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte der gleichartigen Maßzahlen zweier anstoßenden Seiten.

Übungen: a) Berechne den Inhalt eines Quadrates, dessen Umfang = 28 cm ist! (oder = 44 dm, 20 m, 80 km).

b) Wie groß ist die sog. Oberfläche eines Würfels, dessen Kante = 9 cm lang ist? (oder = 20 mm, 2 m).

c) Wenn die Summe aller Kantenlängen eines Würfels = 24 dm (oder 60 cm oder 12 mm) beträgt, wie groß ist die Oberfläche des ganzen Würfels?

d) Eine quadratische Säule hat 7 cm lange Grundkanten und 20 cm lange Seitenkanten; wieviele qcm beträgt ihre Oberfläche?

e) Die drei am Eck eines Quaders zusammenstoßenden Kanten sind 5 und 8 und 10 cm lang; man soll die Oberfläche des Körpers berechnen!

2. a) Zeichne ein Rechteck (H. 171) mit den Seiten = 3 cm und 1 cm. Welche Fläche hat es? — Nun verlängere die Langseite um $\frac{1}{2}$ cm; wieviele qcm hat das angefügte Rechteck? — Also wieviele qcm hat das Rechteck mit den Seiten $3\frac{1}{2}$ cm und 1 cm?

b) Zeichne ebenso ein Rechteck mit den Seiten 4 und 2 cm (H. 172); dann verlängere die Langseite um $\frac{1}{3}$ cm. Ist der Inhalt des Rechtecks $= (4 + \frac{1}{3}) \cdot 2$ qcm $= 8\frac{2}{3}$ qcm?

c) Zeichne 1 qcm und teile die eine Seite in 2, die anstoßende in 4 gleiche Teile und verbinde die entsprechenden Teilpunkte (H. 173). Wie groß ist dann der Inhalt des stärker ausgezogenen Rechtecks? Ist er $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ qcm? — Und ist der Inhalt bei H. 174 tatsächlich $= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$ qcm $= \frac{2}{12}$ qcm?

d) Zeichne ein Rechteck mit den Seiten $3\frac{1}{2}$ cm und $2\frac{1}{4}$ cm (H. 175) und ziehe die angedeuteten Trennungslinien. Aus wievielen Teilen besteht nun das Rechteck? Sind sie alle gleichgroß? Wieviele Arten von Rechtecken verschiedener Größe kann man unterscheiden? Wieviele qcm haben die Teilstücke u, v, w, x? Also wie groß ist die Gesamtfläche des Rechteckes?

Ist aber auch beim Multiplizieren:

$$3\tfrac{1}{2} \cdot 2\tfrac{1}{4} = (3 + \tfrac{1}{2}) \cdot (2 + \tfrac{1}{4}) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4}$$
$$= 6 + \tfrac{3}{4} + 1 + \tfrac{1}{8} = 7\tfrac{7}{8} \text{ qcm?}$$

Hiernach ist also wohl zu sagen:

Der in Nr. 1a angegebene Lehrsatz gilt auch für Rechtecke, bei denen die Maßzahlen der Seiten Bruchzahlen sind.

Übung: Welche Fläche haben die sämtlichen Wände samt Boden und Decke des Schulzimmers, wenn dieses $9\frac{1}{2}$ m lang, 5,4 m breit und 3,8 m hoch ist?

3. **Umwandlung des Rechtecks in ein anderes Rechteck.** — Zeichne und modelliere zweimal ein Rechteck mit den Seiten 20 und 6 mm; das erste Modell zerschneide dann längs der einen Mittellinie (Fig. 65a), das andere längs der anderen Mittellinie (Fig. 65b) und dann (schiebe oder) drehe den einen Teil an den anderen; so entsteht ein Rechteck

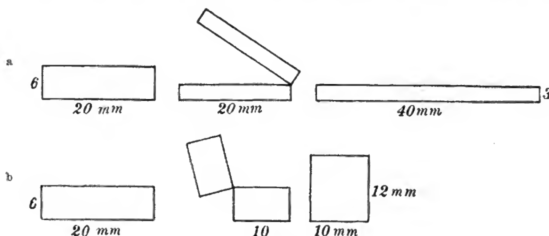


Fig. 65.

mit doppelter Grundseite und halber Höhe oder ein Rechteck mit halber Grundseite und doppelter Höhe. Das neue Rechteck hat $= 40 \cdot 3 = 120$ qmm Inhalt oder $10 \cdot 12 = 120$ qmm, während das ursprüngliche $= 20 \cdot 6 = 120$ qmm hatte. — Zur Übung verwandle ein Rechteck mit der Grundseite 9 und der anderen Seite 24 mm in ein anderes mit 3 (oder 4)fach so großer Grundseite (H. 176)! Ebenso (H. 177) ein Rechteck, dessen Grundseite = 10 mm und Höhe = 21 mm, in ein anderes mit $\frac{4}{5}$fach (oder $2\frac{4}{5}$fach oder $1\frac{4}{5}$fach) so großer Grundseite! (Erprobe, ob $10 \cdot 21 = 8 \cdot 26\frac{1}{4} = 28 \cdot 7\frac{1}{2} = 18 \cdot 11\frac{2}{3}$ $= 210$ qmm ist!)

4. **Umwandlung des Rechtecks in andere Figuren.** — Modelliere ein Rechteck mit den Seiten 8 cm und 5 cm, zerschneide es längs der Eckenlinie (Fig. 66), bezeichne die Teile auf der Oberseite mit *a* und *b*, dann lege die Teile auf alle möglichen Arten je mit der gleichen Seite aneinander! Wieviele Arten? (Vgl. Fig. 48 und 49 auf S. 150.) Welche neuen Formen entstehen? Also:

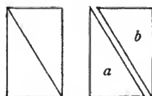


Fig. 66.

Ein Rechteck läßt sich durch Zerschneiden längs der Eckenlinie und Wiederzusammensetzen der Teile auf zwei Arten in ein schiefes Parallelogramm verwandeln.

Somit wird sich wohl auch ein schiefes Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln lassen, und man wird somit auch dazu kommen

können, den Inhalt des beliebigen Parallelogrammes zu berechnen.

60. Der Inhalt des Parallelogramms.

1. **Umwandlung eines schiefen Parallelogrammes in ein Rechteck.** — Zeichne zwei Parallelen im Abstande = 12 mm und zwischen sie (zunächst) vier Parallelogramme je mit der Grundseite = 7 mm und mit dem Winkel α an der Grundseite z. B. = 65°, 60°, 52°, 36°, also derart, daß die im Grenzpunkt der Grundseite senkrecht

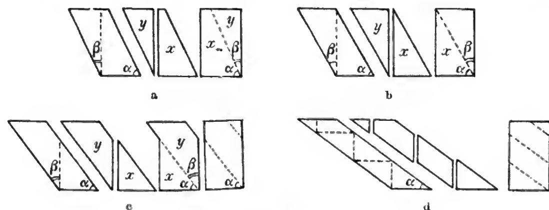


Fig. 67.

zu dieser durch das Parallelogramm gezogene Gerade a) die Gegenseite irgendwo trifft (Fig. 67a) — oder b) genau durch deren einen Grenzpunkt geht (Fig. 67b) — oder c) die Schiefseite oberhalb deren Mitte trifft (Fig. 67c) — oder d) unterhalb deren Mitte trifft (Fig. 67d). Dann schneide die vier Modelle aus und zerschneide jedes längs der genannten Senkrechten, versieh aber zuvor die Teilstücke auf der Oberseite mit besonderer Bezeichnung. Nun lege jedesmal Teilstück y anderseits an x an, so muß die Winkelsumme $(\alpha + \beta)$ genau 1R ausmachen (— warum? — vgl. oben S. 155, Nr. 8, b), also entsteht in den Fällen a) und b) als neue Figur ein Rechteck. In den Fällen c) und d) aber ragt das angesetzte Stück y über x hervor; man hat hier den Anfang der Rechteckseite über y weg weiter zu ziehen, längs der Fortsetzung durchzuschneiden, das abgeschnittene Reststück wieder anderseits anzusetzen usf. Stets ist es so möglich, aus Teilstücken des schiefen Parallelogramms ein Rechteck herzustellen.

2. **Höhen des Parallelogrammes.** — Das aus dem schiefen Parallelogramm hergestellte Rechteck fällt zwischen dieselben zwei Parallelgeraden wie das Parallelogramm. Nun heißt aber der (senkrechte) Abstand der Parallelen beim Rechteck dessen „Höhe“; denselben entsprechenden Abstand nennt man deshalb auch die Höhe des (schiefen) Parallelogramms.

Zeichne ein Parallelogramm mit der Grundseite $g = 10$ mm, mit der Höhe $h = 14$ mm und mit dem einen Winkel α an der Grundseite = 80° (60°, 47°, 18°) [H. 178], miß jedesmal den anderen

Winkel an der Grundseite, miß ferner die schiefe Seite des Parallelogrammes und auch die Strecke, die man die „Breite des Parallelogrammes“ nennen könnte? Welche ist das wohl? Was ist über die „Breite“ im Vergleich zur „Länge des Parallelogrammes“ zu bemerken?

Man kann jede der vier Seiten des Parallelogrammes als Grundseite auffassen, somit gehört auch zu jeder eine Höhe; aber je zwei solche Höhen sind gleichgroß — also:

Ein Parallelogramm hat i. a. zwei verschiedene Höhen — und von jeder sagt man, sie „gehöre“ zu ihrer betreffenden Grundseite.

3. **Inhalt des Parallelogrammes.** — Stets ist der Inhalt des Parallelogrammes gleich dem Inhalt des Rechteckes auf derselben Grundseite mit gleicher Höhe; somit gilt der Lehrsatz:

Die Maßzahl für den (Flächen-) Inhalt eines Parallelogrammes ist gleich dem Produkt der gleichartigen Maßzahlen seiner Grundseite und der zugehörigen Höhe.

Zeichne je ein Parallelogramm aus zwei anstoßenden Seiten a und b und aus ihrem Zwischenwinkel γ; dann miß die Höhen und berechne stets zweimal den Inhalt!

Es sei $a = 21$, $b = 13$ mm, $\sphericalangle \gamma = 59^0$ (H. 179);

ferner $a = 9$ mm, $b = 31$, $\sphericalangle \gamma = 111^0$ (H. 180); dann $a = 23$, $b = 28$ mm, $\sphericalangle \gamma = 60^0$ (H. 181).

4. **Die Inhaltsgleichheit von beliebigen Parallelogrammen** bei Gleichheit von Grundseite und zugehöriger Höhe läßt sich, auch ohne jedes in ein Rechteck zu verwandeln, in verschiedener Art nachweisen. Jedenfalls kann man zwei solche Parallelogramme zwischen dieselben zwei Parallelgeraden verlegen und kann dann weiterfahren

A. mit Zerschneiden beider in deckungsfähige Teilstücke:

a) wenn die durch je einen Grenzpunkt der Grundseite durch das Parallelogramm parallel zu den Seiten des anderen gezogenen Strecken in der Gegenseite endigen (H. 182a), so sind die entstehenden Teilstücke paarweis gleich;

b) ebenso ist es (H. 182b), wenn zufällig die Eckenlinien des einen parallel den Seiten des anderen werden;

c) wenn aber beides nicht der Fall ist (H. 182c u. d), so kann man jedes der Parallelogramme stets durch Teilungslinien, die den Seiten des anderen Parallelogrammes parallel sind, in paarweis gleiche Teilstücke zerschneiden; deren Anzahl wird um so größer, je verschiedener die Seitenrichtungen der Parallelogramme sind.

B. Auch ohne Zerschneiden der Parallelogramme, durch reine Überlegung kann man zur Erkenntnis der Inhaltsgleichheit kommen. Man zeichnet wieder zwischen denselben zwei Parallelen zwei Paral-

lelogramme über denselben Grundseiten entweder so, daß letztere zusammenfallen (H. 183a) — oder so, daß sie getrennt liegen (H. 183b); in jedem dieser Fälle sind die Parallelogramme die Reste, die übrig bleiben, wenn zuerst einerseits, dann anderseits deckungsfähige Teilstücke des ganzen Trapezes abgeschnitten sind.

5. **Verwandeln des (schiefen) Parallelogramms in andere Parallelogrammgestalten,** nämlich

A. unter Beibehaltung der Grundseite

a) in ein Rechteck: man betrachtet von dem durch 2 Seiten $= 9$ und 24 mm und den Zwischenwinkel $A = 146\frac{1}{2}^0$, also $\sphericalangle B = 33\frac{1}{2}^0$ gegebenen Parallelogramm $ABCD$ entweder AB als Grundseite (H. 184a) oder BC als Grundseite (H. 184b);

b) in ein Parallelogramm mit gegebener neuer Seite $s = 15$ mm (G. 185a u. b);

c) in ein Parallelogramm mit gegebener neuer Eckenlinie $e = 16$ mm (H. 186a u. b);

d) in ein Parallelogramm mit gegebenen neuem Winkel an der Grundseite $= 108^0$ (H. 187a u. b);

e) mit gegebener neuer Seite s und mit gegebenem neuem Winkel α ($= 135^0$).

B. unter Änderung sowohl von Grundseite als Winkeln: in dem wie vorhin gegebenen neuen Parallelogramm (Fig. 68a) ziehe die

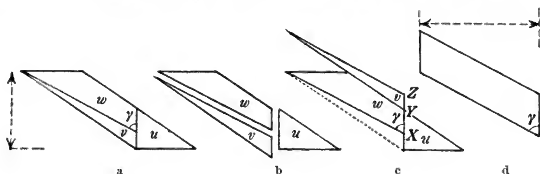


Fig. 68.

Teilungslinien irgendwie, zerschneide dann das modellierte Parallelogramm in die entstandenen drei Teile u, v, w (Fig. 68b), lasse darauf Teilstück w an seinem Platz und lege v anderseits w an (Fig. 68c), so muß XYZ wieder eine Gerade werden (— warum? —), und die von X und Z ausgehenden neuen Seiten müssen parallel werden (— warum? —); in den freibleibenden Winkelraum paßt aber Teilstück u gerade hinein (— warum? —). So entsteht das neue Parallologramm (Fig. 68d), das jetzt [anstelle der Seiten 10,5 u. 24 mm und des Zwischenwinkels $\alpha = 33\frac{1}{2}^0$] annähernd die zwei Seiten $= 7$ u. 24 mm und den Zwischenwinkel $\gamma = 62^0$ besitzt.

61. Verwandlung des Dreiecks und sein Inhalt.

A. Verwandlung eines Dreiecks in ein Parallelogramm.

1. Zeichne und schneide zweimal ein Parallelogramm aus mit einem Winkel = 75° und mit den einschließenden Seiten = 40 und 25 mm; dann schneide in jedem längs einer anderen Eckenlinie durch (H. 189). Wie läßt sich das eine Teildreieck mit dem anderen zur Deckung bringen? — Also:

Ein Dreieck ist halb so groß wie ein Parallelogramm von gleicher Grundseite und Höhe.

2. Wie kann man also ein Dreieck in ein flächengleiches Parallelogramm verwandeln?

a) Durch Zeichnen: man ergänzt das Dreieck zum Parallelogramm (— auf wie viele Arten durchführbar? —) und zieht in diesem parallel mit der als Grundseite gewählten Seite in halber Höhe die Zerlegungsgerade — oder man behält die volle Höhe bei und halbiert die Grundseite (H. 190). Sind diese zwei Zeichenweisen dem Wesen nach verschieden? (Auf wieviele Arten ist die Verwandlung durchführbar? Als Hausaufgabe alle 3 × 2 Arten auszuführen und dabei das gegebene Dreieck und das gefundene Parallelogramm jeweils mit zwei verschiedenen Farbstiften auszuziehen!)

b) Durch Modellieren: Zeichne ein Dreieck mit den Seiten 40, 50, 56 mm, verbinde zwei Seitenmitten, schneide längs der Verbindungsstrecke durch (Fig. 69) und drehe das eine Teilstück um A oder um B halb um. Was entsteht? Müssen die betreffenden Strecken wieder in eine Gerade fallen?

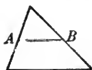


Fig. 69.

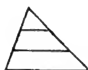


Fig. 70.

Zusatz. Wenn aber zwei Seiten nicht in je 2, sondern in je 3 oder 4 gleiche Teile geteilt werden (Fig. 70), und wenn je längs den Verbindungsstrecken der Teilpunkte durchgeschnitten wird und dann wie vorhin die Teilstücke aneinander gelegt werden, entsteht jedesmal ein Parallelogramm? Wie wird es bei noch mehr Teilpunkten?

B. Verwandlung eines Dreiecks in ein Rechteck.

3. Was wird der leitende Gedanke sein müssen, wenn bei der Umwandlung nicht ein schiefes Parallelogramm, sondern ein Rechteck entstehen soll? Hiernach verwandle:

a) Durch Modellieren[1]): Modelliere ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck dreimal, suche auf den zwei (kleineren) Seiten die

1) Gemäß dem oben S. 121 f. (insbesondere Anmerkung) Gesagten empfiehlt sich hier die Verwendung der dort erwähnten hölzernen Flachmodelle.

Mitten A und B, fälle von ihnen aus die Senkrechten zur dritten (größten) Seite und bezeichne die entstehenden vier Teilstücke, schneide längs der Senkrechten durch (Fig. 71a) und drehe zwei der Dreiecke halb um A und B um (Fig. 71b) — oder (Fig. 71c) fälle auf AB

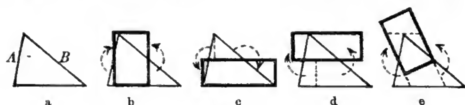


Fig. 71.

die Senkrechte des Teildreiecks, schneide längs dieser durch und drehe wieder um A und B halb um — oder (Fig. 71d) zerlege das Trapezstück durch eine beliebige Senkrechte und drehe — [oder (Fig. 71e) lege durch A und B innerhalb des Dreiecks zwei beliebige Schiefe zur Grundseite, fälle von B auf die durch A gezogene Schiefe die Senkrechte und ergänze gemäß der Figur]. — Man findet so:

Jedes Dreieck ist inhaltsgleich mit einem Rechteck von gleicher Grundseite und halber Höhe — oder inhaltsgleich mit einem Rechteck von gleicher Höhe und halber Grundseite.

b) Durch Zeichnen: Zeichne das Dreieck mit den Seiten 45, 48, 36 mm und verwandle es nach einander gemäß den Modellierungen unter a) je in ein Rechteck (H. 191, a und b) — oder zeichne das Dreieck mit den Seiten 36, 40, 46 mm und verwandle es (H. 192) je in ein Rechteck mit halber Höhe. (Dreieck und Rechteck verschiedenfarbig!)

C. Verwandlung eines Dreiecks in ein anderes Dreieck.

4. Ein Dreieck wurde erkannt als die Hälfte eines Parallelogramms (S. 172, Nr. 1); aber ein Parallelogramm konnte in ein anderes Parallelogramm von wechselnder Gestalt verwandelt werden (S. 171). Demgemäß läßt sich auch ein Dreieck in ein inhaltsgleiches von verschiedenartiger Gestalt verwandeln und zwar:

a) Durch Zeichnen: Zeichne ein Dreieck mit den Seiten 42 und 54 mm über der Grundseite $AB = 48$ mm, einmal links im Heft (H. 193a), das zweitemal in gleicher Höhenlage rechts im Heft (H. 193b). Darauf vervollständige das Dreieck über der gegebenen Grundseite zu einem Parallelogramm AX bzw. BY, darauf verwandle dieses Parallelogramm in ein anderes BZ und ziehe in letzterem die Eckenlinie AZ bzw. BZ, so ist ABZ ein dem gegebenen inhaltsgleiches Dreieck. — Nun zeichne dasselbe gegebene Dreieck nochmals (H. 193c) und zeichne mehrere mit ihm inhaltsgleiche Dreiecke.

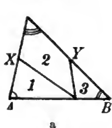
b) Durch Modellieren (Fig. 72): Bilde ein Dreieck mit den Seiten 80, 50, 70 mm. Ziehe von den Mittelpunkten der beiden

letzteren die Strecken nach irgend einem Punkt der ersteren selbst; die entstehenden Seitendreiecke werden um A und B halb umgedreht.


Fig. 72.

Kommen dadurch die Teilstücke von 80 wieder in eine Gerade? warum? Das neu entstandene Dreieck hat mit dem gegebenen gleiche Grundseite und Höhe, aber weicht in der Gestalt ab.

c) Durch Modellieren kann noch in anderer Weise gezeigt werden, daß sich die Gestalt ändern läßt unter Beibehaltung von Grundseite und Höhe (Fig. 73): modelliere ein beliebiges Dreieck und zerschneide es (Fig. 73a) durch Schnitte, die von den Seitenmitten X und Y aus nach einem beliebigen Punkt der dritten Seite gehen, in drei Stücke (1, 2, 3); dann wende 1 und 3 im Raum um und lege sie wieder so nebeneinander (Fig. 73b), daß





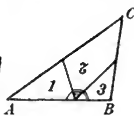


Fig. 73.

ihre Grundseiten wieder die Strecke AB geben. Die bezeichneten Winkel kommen dadurch in die angegebene neue Lage. Nun wende das viereckige Teilstück 2 um XY um und schiebe es in die zwischen 1 und 3 bis jetzt gelassene Lücke hinein (Fig. 73c). Wird es, muß es genau hineinpassen? warum? Werden auch, müssen auch die zwei anstoßenden Seitenstrecken genau an die bis jetzt freien Seiten von 1 und 3 passen? warum? Und werden die zwei hervorragenden Seiten von 2 je mit den anderen Seiten von 1 und 3 gerade Linien bilden? warum muß dies eintreten? — So entsteht ein neues Dreieck ABC. [Miß dessen einzelne Winkel! Miß auch die des ursprünglichen Dreiecks!]

5. Ergebnisse: a) Dreiecke von gleicher Grundseite und Höhe sind inhaltsgleich.

b) Wenn die gleichen Grundseiten zweier inhaltsgleichen Dreiecke auf derselben Geraden liegen, so liegen ihre Spitzen in einer mit dieser letzteren parallelen Geraden.

c) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte [der Maßzahlen] von Grundseite und Höhe.

6. Zeichnungsaufgaben zur Anwendung: Man soll das Dreieck ABC mit den Seiten $AC = 40$ und $BC = 54$ mm und der Grundseite $AB = g = 50$ mm in ein inhaltsgleiches verwandeln,

a) das dieselbe Grundseite g, aber statt der Seite 40 die Seite $s = 46$ mm besitzt (H. 194a) [Verschiedenfarbige Ausführung der verschiedenen Dreiecke!];

b) das dieselbe Grundseite g, aber statt eines der Winkel bei A oder B den Winkel $\alpha = 105^0$ besitzt (H. 194b);

c) das dieselbe Grundseite g hat, aber an dieser rechtwinkelig ist (H. 194c);

d) das dieselbe Grundseite g hat und über dieser gleichschenkelig ist (H. 194d);

e) das denselben Winkel bei A behalten, aber die anliegende Seite $s = 54$ mm [oder $s = 32$] erhalten soll (H. 194e):

man trägt s auf der einen Seite AC ab bis X und zieht XB, so ist das hierdurch abgeschnittene Dreieck XBC zu ersetzen durch das inhaltsgleiche XBS; dann ist AXS das verlangte Dreieck.

7. Rechenaufgaben. — a) Die Grundseite eines Dreiecks ist durch Messen im Hof gefunden = 28,36 m, die zugehörige Höhe (mittels der Kreuzscheibe) = 12,59 m. Wie groß ist der Inhalt α) in qcm? β) in qdm? γ) in qm? — Aufl. s. H. 195, a.

b) Bei einem (im Schulhof abgesteckten) rechtwinkligen Dreieck sind die Katheten = 352 cm und 78,9 dm gemessen worden. Welchen Inhalt hat das Dreieck, angegeben α) in qcm? β) in qdm? γ) in qm? — Aufl. s. H. 195, b.

c) Die zwei Eckenlinien eines Rhombus sind 37,8 cm und 196 mm lang. Wie groß ist dessen Inhalt α) in qcm? β) in qmm? γ) in qdm? — Aufl. s. H. 195, c.

d) Der Inhalt eines Dreiecks sei = 2,678 qdm, seine Höhe = 19,6 cm. Welche Länge hat hiernach die Grundseite g? — Aufl. s. H. 195, d.

e) Der Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks sei bekannt = 23,4 dm. Wie groß ist sein Inhalt in qcm? — Aufl. s. H. 195e.

f) Der Umfang u eines regelmäßigen Sechseckes beträgt = 579 cm. Wie groß ist sein Inhalt in qdm angegeben? — Aufl. s. H. 195, f.

Bemerkung: Die beiden letzten Aufgaben sind nur lösbar, wenn der pythagoreische Lehrsatz (s. weiter unten!) vorher behandelt ist!

D. Verwandlung eines Dreiecks in ein Trapez.
(Vgl. S. 172, Fig. 70, a.)

8a) Durch Modellieren: Bilde das Dreieck mit den Seiten 40, 33, 25 mm zweimal, wähle auf einer Seite (Fig. 74, a) die Mitte X und schneide längs einer durch X gehenden, die Grundseite selbst schneidenden Gerade durch; das abgeschnittene Dreieck wird um X halb umgedreht. Wird die neue Figur ein Trapez sein?

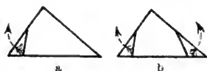


Fig. 74.

Man kann auch noch längs einer durch die zweite Seitenmitte Y gehenden und die Grundseite treffenden Geraden durchschneiden (Fig. 74, b) und dann auch noch das zweite abgeschnittene Dreieck um Y halb umdrehen. Entsteht auch so ein Trapez? und ist dieses gleichgestaltet mit dem vorigen?

Wohin sind das eine (oder die beiden) auf der Grundseite des Dreiecks abgeschnittenen Stücke verlegt worden? Welche Größe haben jetzt die beiden Parallelseiten zusammen?

Ergebnis: Der Inhalt des Trapezes ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, das dieselbe Höhe hat und dessen Grundseite gleich der Summe der Parallelseiten des Trapezes ist.

b) Durch Zeichnen: Zeichne ein Dreieck mit den Seiten 53, 38, 33 mm und verwandle es gemäß a) in ein inhaltsgleiches Trapez (H. 196). Auf wieviele Arten kann das geschehen?

c) Rechenaufgabe: Bei einem Trapez seien die Parallelseiten = 7,8 m und 5,6 m, während ihr Abstand beträgt = 4,9 m. Welchen Inhalt hat das Trapez? — Aufl. s. H. 197.

62. Verwandlung des Trapezes

a) in ein inhaltsgleiches Parallelogramm und zwar durch Modellieren: Man zieht durch die Mitte der einen Nichtparallelen die mit der anderen parallele Strecke innerhalb (Fig. 75, a), schneidet längs ihr durch und dreht das abgeschnittene Dreieck halb um (Begründung?) — oder (Fig. 75, b) man zieht durch die Mitte jeder Nichtparallelen zwei innerhalb des Dreiecks verlaufende parallele Strecken, schneidet längs dieser durch und dreht jedes der zwei abgeschnittenen Dreiecke halb um (Begründung?) — oder (Fig. 75, c) man zieht die Mittelparallele und dreht das eine abgeschnittene Teiltrapez halb um bis zum Anliegen am anderen (Begründung?).

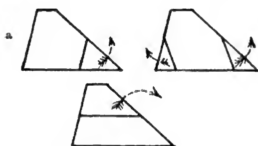


Fig. 75.

Zur Zeichnung verwerte die soeben durchgeführten drei Modellierungen (verschiedene Farben!) (H. 198).

b) in ein inhaltsgleiches Dreieck und zwar zuerst durch Zeichnung (vgl. H. 199, a, b, c) und dann dementsprechend durch Modellierung, wozu noch folgende Art der Verwandlung kommen kann (Fig. 76):

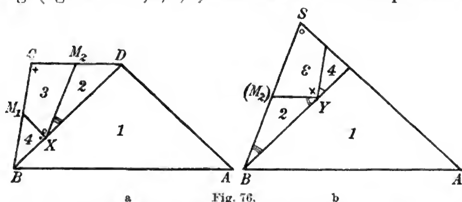


Fig. 76.

Modelliere (Fig. 76, a) ein Trapez $ABCD$ und ziehe darin eine Eckenlinie, etwa BD; dann benütze dasjenige Teildreieck, in welchem die von der Mitte M einer der Nichtparallelen BC des Trapezes aus mit dessen anderer Nichtparallelen DA gezogene Parallele M_1X jene erste Eckenlinie BD schneidet. Ist dann noch der Schnittpunkt X mit der Mitte M_2 der dritten Dreiecksseite CD verbunden, so schneide längs der drei gezogenen Geraden durch und ordne nun (Fig. 76, b) die drei Teilstücke 2, 3, 4 an das liegen bleibende Teilstück 1 so an, wie die Fig. b zeigt. Warum muß [unter Beachtung der gleichartig bezeichneten Winkel] bei Y wieder eine Gerade entstehen? warum ordnen sich auf AS die Teilstücke auch wieder geradlinig an?

c) Rechenaufgaben: α) Eine Wiese erstreckt sich längs einer 97,8 m langen Strecke eines geraden Weges und so, daß die beiden zum Weg senkrechten Grenzlinien 124,3 und 109,5 m lang sind. Wieviel Heu kann auf dieser Wiese geerntet werden, wenn 1 Ar $^3/_4$ Zentner Heu gibt? (Aufl. s. H. 200).

β) Eine trapezförmige Dachfläche hat eine untere Grundlinie = 53,8 m lang und eine obere (First-)Linie = 36,4 m lang; der Abstand beider ist = 24 m. Man soll das Dach mit Ziegeln bedecken, die 27 cm lang und 15 cm breit sind und von denen jeder den unteren auf $^2/_3$ seiner Länge deckt. Wieviele Ziegel sind nötig? (Aufl. s. H. 200, β).

63. Verwandlung des Viereckes und sein Inhalt.

a) Zeichne ein beliebiges Viereck (Fig. 77, a) und ziehe darin eine Eckenlinie; in welche Teile wird es zerlegt? Nun ziehe in jedem der Dreiecke die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Vierecksseiten; welche Lage hat jede dieser Strecken in bezug auf die Eckenlinie? (vgl. S. 149 u. 172), also welche Lage haben die Verbindungsstrecken gegen einander? (vgl. S. 127 u. 172).

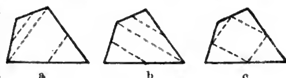


Fig. 77.

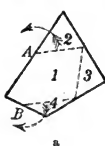
Zeichne das Entsprechende mit Benützung der zweiten Eckenlinie (Fig. 77, b).

Wenn nun die Eckenlinien wegbleiben (Fig. 77, c) und die vier genannten Verbindungsstrecken allein gezeichnet sind, welche Figur müssen diese bilden? warum? — Wir finden also die folgende Wahrheit:

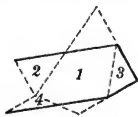
In einem beliebigen Viereck bilden die Verbindungsstrecken der Mitten je zweier Nachbarseiten ein Parallelogramm.

b) Verwandlung des Vierecks in ein Parallelogramm (Fig. 78): Modelliere ein beliebiges Viereck, ziehe darin drei aufeinanderfolgende Verbindungsstrecken von Seitenmitten, bezeichne die entstandenen Teilstücke durch 1, 2, 3, 4; dann zerschneide in die vier Teile und drehe 2 halb um A um und 4 halb um B um, so entsteht das Modell wie in Fig. 78, b. Ist hier schon der Anfang gemacht

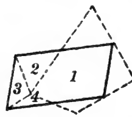
zur Bildung eines Parallelogramms? warum dies? Wird nun noch das Teilstück 3 in den freien Winkel eingefügt werden können? Paßt dies wegen des Winkels? Paßt es auch betreffs der Seitenlängen? Warum ist jetzt auch (Fig. 78, c) die letzte Seite eine richtige Parallelogrammseite?



a



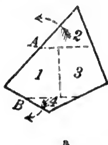
b



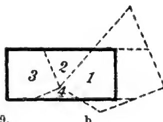
c

Fig. 78.

c) Verwandlung des Vierecks in ein Rechteck (Fig. 79): Zeichne in einem beliebigen Vierecksmodell zwei parallele Verbindungsstrecken von Seitenmitten und ziehe zu ihnen eine Senkrechte; bezeichne die Teilstücke mit 1, 2, 3, 4 und drehe 2 um A und 4 um B halb um. Wird dann das Reststück 3 sich in den freien Winkel einfügen lassen? warum? Und wird die neue fertige, aus den vier Teilstücken zusammengesetzte Figur ein Parallelogramm und gar, wie gewünscht, ein Rechteck sein? — (Benützung der S. 121 f. erwähnten Holzmodelle!)



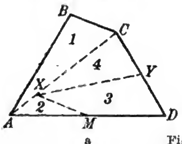
a



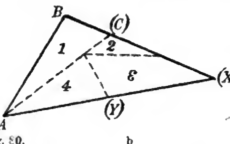
b

Fig. 79.

d) Verwandlung des Vierecks in ein Dreieck und zwar zuerst durch Modellieren (Fig. 80): Ziehe in einem beliebigen Vierecksmodell $ABCD$ eine Eckenlinie AC, dann bis zu ihr von der Mitte M der Seite AD aus die mit CB parallele Strecke MX und verbinde X mit der Mitte Y der Seite CD, so ist das Viereck in vier Teile zerlegt, die mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet werden (Fig. 80, a). Dann verschiebe (ganz wie Fig. 76) 4 bis A und 2 bis C (Fig. 80, b) — werden diese beiden Dreiecke jetzt wieder zusammenstoßen? warum? und wird das umgedrehte Teilstück 3 in den freien Winkel hineinpassen? warum? und wird die äußere Seite von 3 gerade die Verlängerung der äußeren Seite von 4 werden können? oder müssen? Welche Art von Figur bilden jetzt die vier Teilstücke?



a



b

Fig. 80.

Durch Zeichnen läßt sich die Verwandlung vornehmen, wenn man den Gedanken der Figur in H. 194 benützt (s. H. 201).

e) Rechenaufgabe. Auf dem Felde sei ein Viereck $ABCD$ abgesteckt (H. 202), und es seien die in der Figur eingeschriebenen

Maße in Metern gemessen worden. Wie groß ist der Inhalt? und wenn der Quadratmeter 4 M. 33 Pfg. kostet, wie hoch stellt sich der Preis des Geländes?

64. Verwandlung des Vielecks und sein Inhalt.

a) Das gegebene Fünfeck $ABCDE$ (H. 203) soll in ein inhaltsgleiches Dreieck verwandelt werden. — Wie stützt sich das in der Figur ausgeführte Verfahren auf die Zeichenweise von H. 193?

b) Rechenaufgabe. — Ein auf dem Feld abgestecktes Sechseck soll nach den in H. 204 eingeschriebenen Maßen in $\frac{1}{1000}$ d. w. Gr. gezeichnet und dann soll sein Inhalt berechnet werden. (Aufl. s. H. 204).

65. Die Ergänzungsparallelogramme.

1. Zeichne (H. 205) ein Parallelogramm mit dem einen Winkel $= 63^0$ und mit den einschließenden Seiten $= 16$ u. 31 mm; dann wähle auf der Eckenlinie AB einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Seiten: so entstehen außer den Teildreiecken zwei „Ergänzungsparallelogramme“, so genannt, weil sie die beiderseits der Eckenlinie gebildeten Dreiecke a u. b, sowie a' u. b' zu den deckungsfähigen, also inhaltsgleichen großen Dreiecken „ergänzen“. Nimmt man aber von den letzteren einerseits $(a + b)$, andererseits $(a' + b')$ weg, so müssen auch gleichgroße Reste bleiben. Also man erkennt:

„Beim Parallelogramm sind zwei sog. Ergänzungsparallelogramme stets inhaltsgleich.“

Die Wahrheit dieses Satzes läßt sich auch erkennen durch Zerlegen der beiden Parallelogramme in deckungsfähige Teilstücke: zeichnet man nämlich die vorige Figur nochmals (H. 206a) und modelliert sie, so braucht man nur die angegebenen Parallelen zu ziehen und längs ihnen durchzuschneiden, um die in der Figur je mit denselben Zahlen bezeichneten gleichgroßen Teildreiecke zu erhalten. — Sind die Seitenstrecken länger (etwa wie in H. 206b), so entsteht eine größere Zahl von Teildreiecken, die angegebene Zerschneidung ist aber stets durchführbar.

2. Zur **Verwandlung eines gegebenen Parallelogrammes** in ein anderes mit gegebener neuer Seite unter Beibehaltung der Winkel läßt sich der Satz in 1) verwenden. Zeichne (H. 207a) das Parallelogramm $ABCD$ so, daß $\sphericalangle A = 68^0$, $AD = 10$ und $AB = 12$ mm sei; das gewünschte Parallelogramm soll die eine Seite $= 15$ mm erhalten. Mache deshalb $CK = 15$, vervollständige die Figur, so ergibt sich $KL = x$ $(= 8$ mm). — Umgekehrt, wenn die neue Seite $= 8$ mm

werden soll, verfährt man nach H. 207b, und man findet so $KL = x$ (= 15 mm).

Soll dasselbe gegebene Parallelogramm in ein winkelgleiches mit der Seite 20 (oder 6) verwandelt werden, wie wird man verfahren? Gelingt es nach H. 208a oder H. 208b? Man findet $x = 6$ mm (bzw. $x = 20$ mm).

3. Zur Verwandlung eines gegebenen Rechtecks oder eines gegebenen Quadrates in ein Rechteck mit gegebener einer Seite verfahre entsprechend: a) zeichne (H. 209) AC mit den Seiten 10 und 12 mm und wähle $CK = 20$ mm; so findet sich $KL = x = 6$ mm; — b) zeichne (H. 210) AC als Quadrat mit der Seite = 15 mm und wähle $CK = 25$ mm; so findet sich $KL = x = 9$ mm.

4. **Rechnungsaufgaben.**[1])

a) Ein Rechteck hat die Seiten = 24 u. 35 mm; ein anderes mit ihm inhaltsgleiches soll die eine Seite = 21 mm (oder 16,5 oder 17,44 mm) erhalten. Wie groß wird dessen andere Seite x? (H. 211).

b) Ein Quadrat hat die Seite = 42 cm; ein mit ihm inhaltsgleiches Rechteck soll die eine Seite = 28 cm (oder 245 mm oder 2,3 dm oder 25,69 cm) erhalten. Wie lang wird die zweite Seite x des Rechteckes? (H. 212).

c) Ein Quadrat soll denselben Inhalt haben wie ein Rechteck, dessen Seiten im selben Maß = 18 u. 32 sind (oder = 2695 u. 55 oder = 87,5 u. 3,5 oder = 97,2 u. 21,8). Welche Länge x hat die Seite des gesuchten Quadrates? (H. 213).

5. Zeichne ein Rechteck mit den Seiten 15 u. 27 mm (H. 214) und ziehe seine Eckenlinie XB; wo auf dieser wird wohl der Punkt C gewählt werden müssen, damit das eine der Ergänzungsparallelogramme, etwa CY, ein Quadrat wird? — Nach S. 131, § 52, 9 halbiert im Quadrat die Eckenlinie die Winkel; also hat man nur den $\sphericalangle\, Y$ zu halbieren, um Punkt C zu finden. Auf diese Weise kommt man zur

66. Inhaltsgleichheit von Rechteck und Quadrat.

1. Dreht man nämlich (in H. 214 u. 215) das Dreieck u um C und zwar um einen R, so kommt es in die Lage $v = ACF$ (— warum? —), und dabei muß AC in C auf CB senkrecht werden (— warum? —); somit entsteht das bei C rechtwinkelige Dreieck ABC. In diesem

[1]) Bis zu dieser Stelle der geometrischen Anschauungslehre muß, parallel nebenher gehend, im Rechenunterricht der Klasse das Abrunden von Zahlen, z. T. auch das abgekürzte Rechnen und, wie die Aufgabe c zeigt, auch das Ausziehen der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen behandelt sein. Vgl. z. B. des Verfassers „Übgsb. f. d. Rechenunterr. an Mittelschulen“, 2. Teil, S. 79—93 (Lahr, Schauenburg, 3. Aufl., 1905).

ist die Quadratseite CF die Höhe, und diese teilt die größte Seite AB in die zwei Teile AF und FB, die genau die Seiten des einen Ergänzungsrechteckes w sind (— warum? —). Wir kommen so zu dem wichtigen sog. Höhensatz:

„Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe inhaltsgleich mit dem Rechteck, das die beiden durch die Höhe gebildeten Abschnitte der größten Dreiecksseite zu Seiten hat."

Anmerkung. Diesen Sats kann man auch auf andere Arten beweisen, nämlich

a) durch Flächenverwandlung, und zwar indem das Höhenquadrat entweder einerseits von der Höhe gezeichnet wird (H. 216) oder anderseits derselben (H. 217).

Im ersten Fall wird das Quadrat über der Höhe CF (H. 216 II) verwandelt in das schiefe Parallelogramm FG, so daß CG die Verlängerung von BC ist; hierbei wird $GH = IY = AF$. Dann (III) wird Parallelogramm FG über der Grundseite FI verwandelt in das Parallelogramm IK, und dieses [mit der Grundseite FK und der Höhe $IY = AF$] in das Rechteck FL (IV). So ist in der Tat das Quadrat (in I) flächengleich mit dem Rechteck (in V)[1]).

Im zweiten Fall (H. 217) wird das Quadrat über der Höhe CF ebenfalls zuerst in das schiefe Parallelogramm FM verwandelt (I), wobei $HM = AF$ wird, dieses Parallelogramm FM über FN als Grundseite in das Parallelogramm NB (II) und letzteres über der Grundseite FB in das Rechteck FO (III), wo BO der ganzen Entwickelung nach $= AF$ ist.

b) Auch durch Flächenzerlegung läßt sich der genannte Lehrsatz beweisen (Fig. 218), indem das Teildreieck CFA um C um einen R umgedreht und in die Lage CHM gebracht und damit FH zum Höhenquadrat gemacht wird. Ist dann die eine der kleineren Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks, etwa CB, genau gleich der anderen CA (I) oder genau ein Vielfaches von ihr, so ist die Wahrheit des Satzes durch Zerschneiden des Quadrates unmittelbar ersichtlich. Ist aber CB nicht ein Vielfaches von CA, etwa das 1- bis 2fache (II), oder das 2- bis 3fache (III), oder das 3- bis 4fache (IV) usw., so trägt man CA so oft als möglich auf CB ab und zieht durch die Teilpunkte die Parallelen zu CF und AB; dann ist z. B. in III das Flächenstück a ein Teil sowohl des Quadrates als auch des Rechtecks, b aber ist $= b'$ und nach dem Satz von den Ergänzungsparallelogrammen ist stets das Reststück $c = c'$, somit die Verwandlung richtig vorgenommen, also der Satz bewiesen.

2. Die Verwandlung des Rechteckes in ein Quadrat läßt sich jetzt mittels des Höhensatzes durchführen. Zeichne (H. 219) ein Rechteck FL mit den Seiten 15 u. 7 mm. Wie kann nun hier die lösende Figur hergestellt werden? — Man trägt FK als Verlängerung von BF an $= FA$; der Scheitel des rechten Winkels (bei C) muß auf dem Kreis um AB als Durchmesser liegen (S. 154, § 52, 6). Beschreibe

1) Die Schüler können bei ihrem Zeichnen die fünf Einzelzeichnungen von H. 216 in drei oder selbst zwei zusammenziehen (wie dies auch hier in H. 217 geschehen ist). (Verwendung farbiger Bleistifte!)

diesen und ziehe $FC \perp AB$, so ist das Quadrat über FC das gesuchte dem Rechteck FL inhaltsgleiche Quadrat.

Eine andere Anordnung der Lage zeigt die Figur in H. 219b.

Rechnungsbeispiele. a) Wie groß muß die Seite x eines Quadrates sein, damit dieses denselben Inhalt hat wie ein Rechteck mit den Seiten 27 u. 3 (H. 220)? oder wie ein Rechteck mit den Seiten 7,3 u. 31,2 (H. 221)?

b) Ebenso, wenn die Rechtecksseiten 23,76 und 11,29 Längeneinheiten haben (H. 222).

3. Zeichne wieder ein rechtwinkeliges Dreiek ABC (H. 223), dann erreichte aber das Quadrat nicht über seiner Höhe, sondern über einer der kleineren Seiten, z. B. über AC; dann verwandle dieses mit Beibehaltung der Grundseite AD in das schiefe Parallelogramm DB. Dessen Höhe AE (Fig. II) ist nun gleich dem durch die Dreieckshöhe CF auf der größten Seite AB gebildeten anliegenden Abschnitt AF; denn das Dreieck ADE läßt sich durch Umdrehen um A zur Deckung bringen mit dem Dreieck ACF (— warum? —). Wird jetzt eine zweite Verwandlung vorgenommen, nämlich das Parallelogramm DB über der Grundseite AB in das gleichhohe Rechteck AL verwandelt (Fig. II u. III), so ist letzteres inhaltsgleich mit dem ursprünglichen Quadrat CD.

Eine andere Anordnung in der Lage der Figurenteile zeigt H. 224; der Beweisgedanke ist aber derselbe wie vorhin. So findet sich der sog. Kathetensatz:

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über einer der Katheten inhaltsgleich mit dem Rechteck, das die größte Seite des Dreiecks und ihren durch die Höhe gebildeten und dem Quadrat anliegenden Abschnitt zu Seiten hat.“

Ein zweiter Beweis ergibt sich (H. 226) dadurch, daß man die Seiten FR u. AQ des Rechteckes AR verlängert bis zu deren Schnittpunkten X und Y auf DY. Dann ist das Quadrat CD über der Grundseite AC inhaltsgleich mit dem über derselben Grundseite stehenden Parallelogramm AX; aber dessen eine Seite AY ist, wie die Umdrehung des Dreiecks ADY um A zeigt, gleich AB, also auch gleich AQ. Somit ist das Parallelogramm AX auch gleich dem Rechteck AR.

Anmerkung. Auch durch Flächenzerlegung läßt sich dieser Satz als richtig dartun (Modellbenützung!). Zeichne und modelliere deshalb (H. 225) das Quadrat CD auswärts vom rechtwinkeligen Dreieck, das Rechteck AL aber einwärts und ziehe DE; dann schneide längs DL durch und verschiebe das rechtwinkelige Dreieck $(3 + 4)$ längs CB bis zur Deckung mit ABC. Hieraus folgt: $3 + 4 = 3' + 4$, also $3 = 3'$. Somit ist auch das Quadrat $(1 + 2 + 3) = (1 + 2 + 3') =$ Rechteck $(2 + 3' + 1)$.

4. **Die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat** läßt sich nun auch mittels des Kathetensatzes durchführen. Zeichne (H. 227a) ein Rechteck BE mit den Seiten 20 und 5 mm; dann trage AE auf AB ab usw. Schließlich ist CD das gesuchte Quadrat. — Eine andere Anordnung der Lage zeigt die Figur in H. 227b.

67. Der pythagoreische Lehrsatz.

1. Zeichnet man (H. 228) das rechtwinkelige Dreieck ABC, so ist [gemäß § 66, 3]

Quadrat I = Rechteck (1),

ebenso: Quadrat II = Rechteck (2)

also: I + II = III, d. h.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der größten Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden kleineren Seiten.

2. Eine zweite Art des Beweises ergibt sich, wenn man (Fig. 81) ein rechtwinkeliges Dreieck (1) in das eine Eck eines Quadrates einlegt, dessen Seite gleich der Summe der kleineren Seiten des Dreiecks ist, und wenn man dann noch drei andere mit (1) deckungsfähige Dreiecke in die übrigen drei Ecken des Quadrates einlegt. Die freibleibende Figur III ist dann ein Quadrat. Warum? — Dreht man aber innerhalb des Quadrates (2) und (4) so, daß (2) neben (1) und (4) neben (3) zu liegen kommt, so entstehen zwei Rechtecke (— warum? —), und diese lassen die Quadrate I und II frei. Somit ist I + II = III (Modellbenützung!).

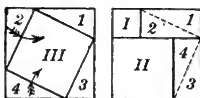


Fig. 81.

3. Eine dritte Art des Beweises zeigt Fig. 82. Man zeichnet wieder das rechtwinkelige Dreieck (1) und dessen Seitenquadrate. Ergänzt man dann einerseits die Quadrate I und II durch das Rechteck, das in die zwei Dreiecke 2 und 3 zerlegt wird, und umkleidet man andererseits das Quadrat III mit den vier Dreiecken 4, 5, 6, 7, die mit 1 deckungsfähig sind, so ist das Quadrat UV deckungsfähig mit YZ. Nimmt man also vom ersteren Quadrat die vier Dreiecke 1, 2, 3, 7 weg und vom zweiten die vier Dreiecke 1, 4, 5, 6, so bleiben gleiche Reste, nämlich I + II = III (Modellverwertung!).

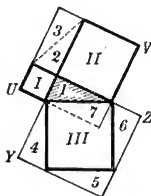


Fig. 82.

4. Eine vierte und fünfte Art des Nachweises durch Zerschneiden zeigen Fig. 83 und Fig. 84.

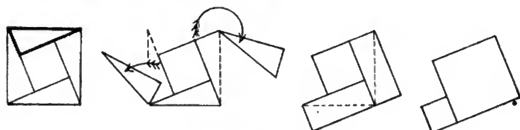


Fig. 83.

68. Anwendungen des pythagoreischen Lehrsatzes.

(Zur Auswahl.)

1. Aufgabe. Man soll die Summe zweier gegebenen Quadrate als Quadrat darstellen.

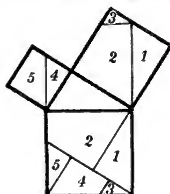


Fig. 84.

Auflösung: A. durch Zeichnen (H. 229),
B. durch Rechnen (H. 230).

2. Aufgabe. Den Unterschied zweier Quadrate als Quadrat darzustellen.

Auflösung: A. durch Zeichnen (H. 231);
B. durch Rechnen (H. 232).

3. Aufgabe. Man soll die Summe dreier (oder mehr) gegebenen Quadrate als Quadrat darstellen.

Auflösung: A. durch Zeichnen (H. 233); B. durch Rechnen (H. 234), letzteres auch für den weiteren Fall, daß die Quadratseiten

c) $s_1 = 36$, $s_2 = 77$, $s_3 = 132$ $(x = 157)$,
d) $s_1 = 140$, $s_2 = 171$, $s_3 = 60$ $(x = 229)$,
e) $s_1 = 9$, $s_2 = 12$, $s_3 = 8$, $s_4 = 144$, $s_5 = 408$ $(x = 433)$,
f) $s_1 = 144$, $s_2 = 108$, $s_3 = 96$, $s_4 = 253$, $s_5 = 228$ $(x = 397)$.

4. Aufgabe. Das Doppelte eines Quadrates soll als Quadrat dargestellt werden.

Auflösung: A. durch Zeichnen (H. 235);
B. durch Rechnen (H. 236).

5. Aufgabe. Die Hälfte eines Quadrates als Quadrat darzustellen.

Auflösung: A. durch Zeichnen (H. 237);
B. durch Rechnen.

6. Aufgabe. Gegeben sind ein Rechteck (Seiten = 25 und 16 mm) und ein Quadrat (Seite = 29 mm); man soll 1. die Summe beider als Quadrat darstellen, ebenso 2. den Unterschied.

7. Aufgabe. Gegeben sind zwei Rechtecke; die Seite des einen = 24, 54, die des anderen = 5, 45. Man soll 1. ihre Summe als Quadrat darstellen, ebenso 2. ihren Unterschied.

Auflösung (in verschiedener Weise) =?

8. Aufgabe (H. 238). An zwei in gleicher Höhe befindlichen und 30 m (24 m) voneinander entfernten Punkten ist ein 34 m (26 m) langes Seil befestigt und in der Mitte belastet. Wie tief senkt sich sein Mittelpunkt unter die Wagrechte herab?

9. Aufgabe. Bei einem rechtwinkeligen Dreieck (Fig. 85) seien bekannt:

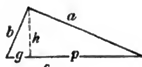


Fig. 85.

1) $p = 5$, $q = 45$ [oder $p = 8{,}4$, $q = 2{,}1$]; wie groß ist h?

2) $a = 20$, $p = 16$ [oder $a = 25$, $p = 20$, oder $b = 17$, $q = 8$]; wie groß ist c?

3) $b = 35$, $h = 21$ [oder $a = 14{,}9$, $h = 5{,}1$]; wie groß ist c?

4) $p = 2$, $h = 1{,}5$ [oder $h = 0{,}21$, $q = 0{,}28$]; wie groß sind a und b?

10. Aufgabe. Die Seite s eines Quadrates ist = 7 [oder 8,1 oder 100,3]; wie groß ist seine Eckenlinie e?

11. Aufgabe. Der Umfang u eines gleichseitigen Dreicks ist = 120 [oder 254 oder 79,2]; wie groß ist seine Höhe h? (H. 239).

12. Aufgabe. Gegeben ist die Grundseite g eines gleichschenkeligen Dreiecks = 24 [oder 5,6 oder 1,3] und die zugehörige Höhe h = 35 [oder bzw. 4,5 oder 1,44]; wie groß ist sein Umfang u?

13. Aufgabe. In einer Raute haben die Eckenlinien die Längen 48 und 14 [oder 24 und 70 oder 11,2 und 6,6]; wie groß ist der Umfang u? (H. 239).

14. Aufgabe. Von derselben Station ab fahren zwei Bahnzüge in zueinander rechtwinkeligen Richtungen ab; der eine legt in der Sekunde 8 m, der andere 15 m zurück. Wie weit sind die Züge voneinander entfernt nach a) 23 Sekunden Fahrzeit? oder nach b) $2\frac{1}{2}$ Minuten, c) $7\frac{1}{4}$ Minuten Fahrzeit?

69. Inhalt der Kreisscheibe.

1. Zeichne eine Kreisscheibe (Fig. 86 a. f. S.), zerlege sie durch Halbmesser in 6 gleiche Teile und zerschneide, dann lege die sechs Teilstücke (Kreisausschnitte) nach Art der Fig. a nebeneinander und klebe sie auf. Darauf zerlege eine gleiche Kreisscheibe durch Halbmesser in 12 Ausschnitte, lege auch diese nach Art der Fig. b nebeneinander und klebe sie so fest. Welchen Inhalt in Vergleichung mit der Kreisscheibe hat jedesmal die gewonnene Figur? Wie unterscheiden

sich die erhaltenen zwei Figuren? Und wenn man die Kreisscheibe in 24 Teilstücke zerschnitte und diese wiederum entsprechend an-

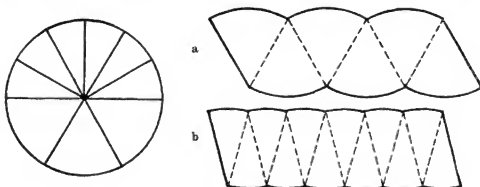


Fig. 86.

einander klebte, welcher Unterschied würde sich zeigen? Wie wäre es, wenn man noch mehr Teilstücke bildete?

Kann die entstehende Figur annähernd ein Parallelogramm werden? Unter welcher Bedingung nähert sich die Figur mehr und mehr einem Parallelogramm? Wie groß ist dessen Grundseite? und wie groß ist dessen Höhe?

Also ist der Inhalt der Kreisscheibe = Produkt aus halber Kreislänge und Halbmesser

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} \cdot r,$$

somit **Inhalt der Kreisscheibe** $= \pi \cdot r \cdot r$.

2. Rechnungsbeispiele.

a) In einem Garten ist eine kreisrunde Rasenfläche, und deren Durchmesser beträgt 12 m. Welche Fläche hat der Rasen? — Wenn aber in dessen Mitte ein kreisrundes Wasserbecken von 2 m Halbmesser vorhanden wäre, welche Fläche hätte dann der Rasen?

Antw.: Volle Kreisscheibe $= 3{,}14 \cdot 6 \cdot 6$ qm $= 113{,}04$ qm.
Kreisringfläche $= 113{,}04 - 3{,}14 \cdot 2 \cdot 2 = 113{,}04 - 12{,}56 = 100{,}48$.

b) Der Durchmesser eines kreisrunden öffentlichen Platzes beträgt = 240,6 m; der Platz soll gepflastert werden, und der Quadratmeter der Pflasterung kostet 3 ℳ 18 ₰. Was kostet die Platzpflasterung?

Antw.: Der Inhalt der Kreisscheibe ist $= \frac{22 \cdot 120{,}3 \cdot 120{,}3}{7}$ qm;
die Kosten belaufen sich auf = ?

c) Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks (z. B. in Fig. 63) messe = 14 mm; welchen Inhalt hat die Scheibe des dem Sechseck umgeschriebenen Kreises?

Antw.: Kreisscheibe $= \frac{22}{7} \cdot 14 \cdot 14$ qmm $= 44 \cdot 14 = 616$ qmm.

III. Rauminhalt der einfachen Körperformen.

Vorbemerkung. — Bei der hier folgenden Abteilung des geometrischen Anschauungsunterrichtes bedarf dieser außer manchen der schon früher benützten körperlichen ringsum geschlossenen Modelle sowie der Drahtmodelle auch eine Reihe von oben offenen, also gefäßartigen Modellen der Hauptkörperformen, am besten solcher aus Blech gefertigten. Mit deren Hilfe wird die Größenvergleichung der bezüglichen Körperräume dadurch auch anschaulich vorgenommen, daß der eine Raum (nicht etwa mit Wasser — wegen des unvermeidlichen nachfolgenden Rostens der Gefäße, sondern) etwa mit Hanf- oder Leinsamen, oder Streusand, oder mit einem ähnlichen feinkörnigen Stoff gefüllt, übergefüllt, dann mit Lineal abgestrichen wird und nun dessen Inhalt (nötigenfalls mehrmals nacheinander) in den anderen Raum vorsichtig, etwa mit Benützung einer Papierdüte, übergegossen wird. — Auch die Benützung einer Wage ist erwünscht oder notwendig.

70. Raummaße (und Gewichte).

1. Benütze (oder modelliere erneut) den Würfel, von dem jede Kante 1 dm lang ist; er heißt Kubikdezimeter = 1 cdm. (Das Wort ist abgeleitet aus cubus, d. i. Würfel.)

Der Rauminhalt eines Kubikdezimeters heißt auch 1 Liter (= 1 l); dieser kann auch andere[1]) als Würfelform haben, etwa niederzylindrisch (meist aus Holz zum Messen von Körnern und Pulvern oder Mehl), oder hochzylindrisch (zum Messen von Flüssigkeiten), oder krugartig, oder flaschenartig u. dgl.

Auch Unterabteilungen des Litermaßes werden im geschäftlichen Leben viel benützt: halbe Liter, Viertelliter, Zehntelliter. Auch Oberabteilungen werden gebraucht: so hauptsächlich Zehnlitergefäße und Zwanziglitergefäße (meist aus Holz). Wer weiß, wozu und wo diese alle verwendet werden? — Gibt es auch Hundertlitergefäße und Tausendlitergefäße?

2. Stelle deinen Würfel von 1 cdm in die Grundstellung, miß auf jeder lotrechten Kante von den oberen Ecken aus nach unten 1 cm ab und verbinde die erhaltenen Grenzpunkte aufeinanderfolgend durch Strecken. Denke längs dieser Strecken durchgeschnitten; was läßt sich dann oben abtrennen? Wie wird man eine solche abtrennbare Platte für sich modellieren? Zeichne deren Netz (H. 240a) in wahrer Größe und modelliere sie! (Beachte dabei aber die Dicke des Pappdeckels!). — Aus wievielen solchen Platten läßt sich 1 cdm zusammengesetzt denken?

Miß nun bei einer solchen Platte auf den vier parallelen Kanten, die von den Ecken eines der kleineren Rechtecke ausgehen, je 1 cm

---

1) Diese andersartigen Formen sollten alle vorgezeigt und durch Einfüllen von Sand oder Samen als tatsächlich 1 l haltend nachgewiesen werden. Dabei ist Art und Grund der amtlichen „Eichung" kurz zu besprechen.

ab und verbinde wieder die Grenzpunkte und denke längs der so erhaltenen Strecken durchgeschnitten; was läßt sich so von der Platte abtrennen? Wie läßt sich wohl ein so abtrennbarer Stab modellieren? Zeichne dessen Netz in wahrer Größe (H. 240b) und modelliere ihn! (Beachte die Dicke des Pappdeckels!) — Aus wievielen solchen „Stäben“ läßt sich eine „Platte“ zusammensetzen?

Miß nun wiederum bei einem solchen Stab auf dessen Kanten, die von den Ecken eines Begrenzungsquadrates ausgehen, je 1 cm ab, ziehe die Verbindungsstrecken der Grenzpunkte und denke längs der Strecken durchgeschnitten (H. 240c); was ist das abgeschnittene kleinere Stück? warum ein Würfel? Wie lang ist jede Kante desselben? warum genau 1 cm? Ein solcher Würfel, von dem jede Kante 1 cm mißt, heißt ein Kubikzentimeter (1 ccm).

Wieviele solche Kubikzentimeter enthält einer der vorigen Stäbe? also wieviele enthält eine Platte? also aus wievielen Kubikzentimetern ist ein Kubikdezimeter zusammensetzbar? (1 cdm = 10 · 10 · 10 ccm).

Nun zeichne auch in wahrer Größe das Netz eines Kubikzentimeters und modelliere ihn! Könnte man entsprechend auch 1 ccm in 1000 Kubikmillimeter zerlegen?

3. Wir wollen jetzt auch ein Ansichtsbild eines Kubikzentimeters zeichnen (H. 241). Hier halte ich 1 ccm in der Höhe deines einen Auges, verdecke du das andere mit der Hand; siehst du die hintere Fläche des Würfelchens? oder wohl seine obere Fläche, die untere, die linke usw.? welche Fläche kannst du also sehen? — Wenn du auch die obere Fläche sehen willst, wie muß der Würfel gegen das Auge (oder umgekehrt) verschoben werden? und wie, wenn du die untere zugleich mit der vorderen sehen willst? usw. — Ist es auch möglich, Würfel und Auge in eine solche Stellung zu bringen, daß man drei Flächen des Würfels gleichzeitig sehen kann? wohin z. B. muß das Auge kommen, wenn man die vordere und die obere und die rechte Fläche sehen will? usw. Wieviele Fälle sind hierbei denkbar, wenn stets die vordere Fläche mit sichtbar sein soll?

Hier zeige ich euch nun einige Bilder [von städtischen Straßen, Gebäudeansichten, Innenräume, Säle u. dgl.] [1]), in welchen mehrmals Parallelgeraden der Natur im Bild mit roten Geraden nachgefahren sind; erscheinen jene auch im Bild parallel? alle? welche erscheinen parallel? und welche nicht?

Wenn also ein vor uns aufgestellter beliebiger Würfel im perspektivischen Bild richtig gezeichnet sein soll, können dann alle in der Natur parallelen Kanten auch im Bilde parallel erscheinen?

1) Hier könnte der Massenunterricht gut zu seinem Rechte kommen und das Nötigste rasch erledigt werden, wenn die Schule einige genügend große, in kräftigen Linien ausgeführte perspektivische Ansichten von Dingen obengenannter Art zur Verfügung stellen kann.

Um aber bequemer zeichnen zu können und um in dem das Bild Beschauenden die geometrische Vorstellung von parallelen Geraden (Kanten) leichter zu erwecken und festzuhalten, verwendet man in der Geometrie oft die sog. falsche Perspektive, d. h. man zeichnet parallele Geraden der Natur auch im Bild als parallele Geraden. Auch wir wollen hiervon Gebrauch machen.

(Beifügung einer Aufklärung über das geometrische Zeichnen eigentlich unsichtbarer Linien und über deren Unterscheidung von den sichtbaren!)

Betrachte die hier (Fig. 87) beigefügten Bilder eines Würfels[1]): welche Vorstellungen über die Lage des beschauenden Auges zum Würfel wollen und sollen sie erwecken? Warum erscheinen die in der Natur gleichlangen Würfelkanten hier im Bild nicht sämtlich gleichlang?

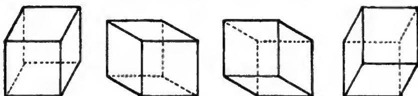


Fig. 87.

Nun zeichnet hiernach 1 ccm in falscher Perspektive in euer Heft! (H. 241). Erscheint die Abbildung nicht größer als der ccm, obwohl doch die Vorder- und Seitenkanten tatsächlich abgemessen je 1 cm lang sind?

4. Ein Litergefäß (— das man vielleicht zuerst nochmals als genau 1 cdm enthaltend nachweist —) wird auf der Wage am besten ohne Gewichte (etwa durch Steine oder Bleischrot) ausgeglichen, dann mit Wasser gefüllt: dieses gibt dann das Gewicht von 1 Kilogramm an[2]). Welches Gewicht hat also 1 ccm reinen Wassers? — Nun wird auch das Litergefäß mit Sand (Eisenpulver, Alkohol) gefüllt oder auch ein Kubikdezimeter Sandstein (Kalk, Granit, Eisen) abgewogen und der Begriff des spezifischen Gewichtes (Artgewichtes) erläutert, d. h. an Beispielen deutlich gemacht.

[Anschließend ist es geraten, auch mehrere der in der physikalischen Sammlung vorhandenen einzelnen genauen Kubikzentimeter aus verschiedenen Stoffen (Metallen) durch Abwägen auf ihr Artgewicht zu prüfen.]

5. Hier auf dem Tisch liegt eine Quadratmeter-Platte. Leget nun auf sie deren vorderer Kante entlang mehrere Kubikdezimeter-Würfel dicht aneinander; wieviele werden ihr entlang gelegt werden können?

---

1) Diese Bilder in großem Maßstab und kräftig gezeichnet sind zuerst einzeln vor den Schülern aufzustellen und zu besprechen, dann erst gleichzeitig vorzuführen.

2) Obwohl ein solcher Wägeversuch vor den Augen des Schülers schon früher, bei der Einführung der Gewichtsmaße, gemacht ist oder jedenfalls gemacht werden sollte, ist es doch ratsam, ihn hier nochmals vorzuführen.

Ich fasse sie fest zwischen Händen und zeige sie als Stab; wieviele solche Stäbe könnten auf dem qm hintereinander gelegt werden, damit dieser völlig bedeckt wäre? Wieviele solcher Platten lassen sich aufeinander geschichtet denken, bis der ganze Aufbau 1 m hoch ist? Welche Gestalt hat dieser Aufbau? Es ist ein Kubikmeter (= 1 cbm).

Ein Kubikmeter hat 1000 cdm, 1 cdm hat 1000 ccm, 1 ccm hat 1000 cmm.

Das metrische Raummaß ist 1000teilig, das Flächenmaß ist 100teilig, das Längenmaß ist 10teilig.

Warum sind die beiden ersteren vorstehenden Aussagen eine notwendige Folge der letzten?

Ein Kubikmeter ist die Einheit des Raummaßes. Unter dem Inhalt eines Körpers versteht man die Anzahl der in ihm enthaltenen Raummaß-Einheiten.

Umstelle hier in der Zimmerecke mit der Quadratmeterplatte einen Kubikmeter! Welcher Gegenstand hat etwa die Größe eines Kubikmeters?

Zusatz. Hier haben Rechenaufgaben einzusetzen über das Ab- und Aufverwandeln (das sog. Resolvieren und Reduzieren) der Raummaße, insbesondere über das richtige Setzen des Dezimalkommas und über das gelegentlich notwendig werdende Einsetzen von Nullen in die betreffende Zifferngruppe.[1])

71. Inhalt von Prismen.

1. Lege vier einzelne Kubikdezimeter im Viereck dicht aneinander; welche Bodenfläche bilden sie? Lege noch eine zweite solche Schicht darauf; welche Körperform bilden nun alle acht vereint? — Wir zeichnen jetzt das Bild des Körpers (H. 242a) und wählen dabei 1 cm für 1 dm. — Wieviele einzelne cdm enthält also ein Würfel, dessen Kantenlänge 3 dm (5 dm, 2 cm, 3 mm) beträgt? warum soviele? könnte man alle einzelnen, deren Gesamtzahl man berechnet hat, für sich losgelöst hinstellen? wie?

Der Inhalt (die Inhaltszahl) eines Würfels wird gefunden, indem man die Maßzahl der Kante zur dritten Potenz erhebt und dem Ergebnis den Namen des entsprechenden Raummaßes beifügt.[2])

2. Seht euch diesen neuen Körper an! Er steht wie der vorige Würfel auf einem Bodenquadrat, dessen Kante 2 dm beträgt, ist aber

1) Vgl. des Verfassers „Übungsbuch für den Rechenunterricht an Mittelschulen" (Lahr, Schauenburg, 3. Aufl.), 2. Teil, S. 104ff.

2) Vgl. z. B. „Übungsbuch", 2. Teil, S. 54.

nicht aufrecht, sondern schief. Stelle die beiden auf den Tisch und lege ein Heft oder Buch gemeinsam auf ihre beiden oberen Flächen; was bemerkst du? Man sagt, beide Körper haben die gleiche Höhe oder sind gleichhoch, weil ja ihre obere und untere Fläche den gleichen Abstand haben. — Sind beide Körper auch gleichlang?

Schiebe die beiden Körper mit einer gleichen Bodenkante aneinander; welcher Zwischenraum entsteht? wie muß der Körper beschaffen sein, der diesen Zwischenraum gerade ausfüllt? Ich setze diesen Keil ein. Welchen Anblick gewährt nun die Vorderseite? Wie ist am Modell die Inhaltsgleichheit beider Körper zu zeigen? (— ganz so wie die Inhaltsgleichheit der entsprechenden Parallelogramme?) Nun zeichnen wir auch diesen zweiten Körper (s. H. 242b).

3. Hier ist eine aufrechte quadratische Säule; miß deren Kantenlängen! (z. B. = 2 cm, 3 cm, 4 cm [oder dm]). Wie ließe sich dieser Körper [ähnlich wie früher der Kubikdezimeter] in Platten, in Stäbe, in einzelne Würfel zerlegen? Ist die Reihenfolge des dazu nötigen Zerschneidens nur auf eine Art möglich? auf wieviele Arten?

Wieviele Würfel ergeben sich so als Teile des Ganzen? (H. 243a).

Wieviele ergeben sich aber, wenn die Kanten der Säule 3, 4, 5 cm (dm) lang sind? oder wenn sie . . .?

Also wie wird der Inhalt einer quadratischen Säule berechnet?

Rechnungsaufgaben. — a) Welches Gewicht hat eine aufrechte quadratische Säule aus Sandstein (spez. Gewicht = 2,5), deren Grundkante 8 dm und deren Höhenkante 2 m 10 cm beträgt?

b) Eine Stange Packsiegellack mit quadratischem Querschnitt ist 16 cm lang und 12 mm dick und wiegt 46,08 g; welches Artgewicht hat der Siegellack, aus dem sie gefertigt ist?

Nun zeichnet (H. 243b) eine schiefstehende Säule, welche die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe hat wie die vorige, und zwar in verschiedener Weise (auch H. 244 u. H. 245). Welchen Inhalt hat sie? warum?

Zusatz. Wie läßt sich an einem Würfelmodell, dessen Kante $2\frac{1}{2}$ dm lang ist, zeigen, daß dessen Inhalt genau $= 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2}$ cdm $= \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$ cdm ist? [nämlich der Inhalt ist $= [8 + 3 \cdot (2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}) + 3 \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^3]$.

4. Läßt sich ein Quader durch Parallelschnitte mit den Seitenflächen in Platten, Stäbe und Würfel zerschneiden? in wieviel Arten der Reihenfolge ist dieses Zerschneiden durchführbar? Was ist das Ergebnis? Und gilt das Ergebnis auch, wenn auf der rechteckigen Grundfläche ein schiefer Parallelflächner von gleicher Höhe aufgebaut ist.

Der Inhalt eines Quaders ist gleich dem Produkt der (gleichnamigen Maßzahlen der) drei an einem Eck zusammenstoßenden Kanten.

Rechnungsaufgaben. — a) Unser Schulzimmer, an den Wänden (ohne Fenster usw.) gleichmäßig glatt gedacht, sei 9 m lang, $5^1/_2$ m breit und 4 m hoch. Wie groß ist sein Inhalt?

b) Reicht der Raum des Schulzimmers unter a) für 32 Schüler, wenn nach der Verordnung der Behörde auf jeden Schüler 3 cbm 50 cdm Luftraum zu rechnen sind?

c) Welches Gewicht hat eine quaderförmige Sandsteinplatte, die 1,8 m lang, 90 cm breit und 95 mm dick ist? (Artgewicht des Sandsteins = 2,3).

d) Die 26 Blätter zählende Schreibpapiereinlage eines 16 cm breiten und 21 cm hohen Schulheftes wiegt 78 g, das Artgewicht des betreffenden Papieres ist = 0,9. Wie schwer ist das einzelne Papierblatt? und wie dick ist es?

5. Ein Quader werde durch eine Ebene zerschnitten, die durch zwei Gegenkanten des Körpers geht[1]); auf wieviele Arten ist das möglich? Welche Grundfläche und welche Höhe hat das eine entstandene Teilstück des Quaders? Wie heißt ein solches Teilstück? Gibt es auch schiefe dreiseitige Prismen? und aus welcher Körperform können solche durch einmaliges Zerschneiden abgeleitet werden?

Ist das dreiseitige Prisma genau die Hälfte des entsprechenden Parallelflächners? Wie wird also der Inhalt des (aufrechten oder schiefen) dreiseitigen Prismas berechnet werden?

Zeichne beide Arten von dreiseitigen Prismen als Hälften von Parallelflächnern! (s. H. 246).

6. Wie kann wohl ein vierseitiges, fünf-, ..., vielseitiges Prisma in lauter dreiseitige Prismen von gleicher Höhe zerlegt werden? und wie kann es wieder als deren Summe dargestellt werden? Wie wird wohl der Inhalt eines vielseitigen Prismas berechnet?

72. Inhalt des Kreiszylinders.

Rechnungsbeispiele. — a) Wieviel Wasser faßt eine zylindrische Straßenwalze, deren Länge (im Lichten) 1 m 20 cm und deren Durchmesser 1 m 10 cm mißt? Welches Gewicht hat das Wasser?

b) Ein halbzylindrischer Brunnentrog von 1,8 m Länge hat oben einen Querdurchmesser von 60 cm. Wieviel Wasser kann er fassen?

1) Hierzu ist ein Modell (am besten mit Scharnieren) zu benützen, ebenso für die Ableitung des schiefen dreiseitigen Prismas.

73. Inhalt von Pyramiden.

1. Als besonderen Fall betrachten wir zunächst die Zerlegung des Würfels in 6 Pyramiden, deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt und deren Grundflächen die Würfelflächen sind. Eine solche Pyramide ist $= {}^1/_6$ des Würfels, also $= {}^1/_3$ des Quaders auf gleicher Grundfläche bei gleicher Höhe, d. h. $= {}^1/_3$ des halben Würfels.

2. Ein dreiseitiges Prisma (— zerlegbar! —) liegt als Modell vor, und es sei gezeichnet über der Grundfläche ABC (s. H. 247a). Nun legt man einen ebenen Schnitt von B' aus nach AC hin und zerschneidet so den ganzen Körper in zwei Teile, beides Pyramiden — wie beschaffen sind diese? Die vierseitige, auf dem Viereck $ACC'A'$ aufstehende, mit der Spitze in B', kann nochmals zerschnitten werden durch die Ebene $AB'C'$ in zwei dreiseitige Pyramiden, deren eine als Doppelkeil erscheint; weshalb ist jede dieser die Hälfte der ganzen vierseitigen? und weshalb ist die eine inhaltsgleich mit der erst abgeschnittenen? Also in wieviele gleiche Teile zerfällt das Prisma? was folgt hieraus über den Inhalt der dreiseitigen Pyramide?

Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist der dritte Teil des Inhaltes eines dreiseitigen Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, also ein Drittel des Produktes ihrer Grundfläche und Höhe.

Nun sollen auch die drei Teile in ihrer gegenseitigen Stellung, wie sie beim Zerschneiden entstehen, gezeichnet werden (s. H. 247b)[1]) und auch der Doppelkeil soll nochmals besonders gezeichnet werden (s. H. 247c).

3. Zeichne eine beliebige dreiseitige Pyramide (s. H. 248); dann ergänze die dreieckige Grundfläche zum Parallelogramm und zeichne darüber die Pyramide mit gleicher Höhe der vorigen (s. H. 248). Wie geschieht das? Welchen Inhalt hat nun die vierseitige Pyramide?

Wenn man nicht bloß wie eben, zwei Dreiecke zu einem Viereck zusammensetzt, sondern mehrere Dreiecke passend zu einem Vieleck, und wenn man über diesem eine Pyramide errichtet (— Modell! —), ist diese wieder in dreiseitige Pyramiden zerlegbar? wie? Wie groß wird also der Inhalt einer beliebigen Pyramide sein?

Der Inhalt einer Pyramide ist gleich einem Drittel des Produktes ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

---

1) Hier ist beim Zeichnen den Schülern anzuraten, das Dreieck je aus den drei Seiten zu zeichnen oder es nach Bedarf durchzustechen; die Lage der Bestimmungspunkte für die Einzelfiguren ist zahlenmäßig mitzuteilen. Insbesondere ist zu raten, die Lage so zu wählen, daß die eine vordere Pyramide die beiden anderen teilweise zudeckt (s. H. 247b).

Rechenaufgaben: a) Eine der großen ägyptischen Pyramiden hat als Grundfläche ein Quadrat von 240 m Seitenlänge, und ihre Höhe beträgt 151 m. Wie groß ist ihr Inhalt? und wenn sie ganz aus Stein bestände, dessen Artgewicht = 2,5 ist, welches wäre ihr Gewicht?

b) Eine Pyramide habe ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite = 8 cm mißt, als Grundfläche, und ihre Höhe sei doppelt so groß als der Durchmesser des Sechsecksumkreises. Welchen Inhalt hat die Pyramide?

74. Inhalt des Kreiskegels.

Rechnungsbeispiele. — a) Ein aufrechter Kreiskegel hat 14 cm Grundkreisdurchmesser und ist 20 cm hoch; welchen Inhalt hat er? — Wenn er, auf der Grundfläche aufstehend, bis zur halben Höhe mit Quecksilber gefüllt wird (dessen Eigengewicht = 13,6 ist), welches Gewicht hat dieses Quecksilber?

b) Ein kegelförmiger Baumstamm, dessen Grundkreis 28 cm Durchmesser hat, wiegt 110,88 kg; das Artgewicht des Holzes ist = 0,6. Wie lang ist der Stamm?

Zweiter Teil.

Der geometrische Unterricht der Oberstufe unserer höheren Schulen.

(Eine Skizze.)

75. Als eine „Skizze“ bezeichnet sich der zweite Teil der vorliegenden Schrift, der sich mit dem geometrischen Unterricht der Mittel- und Oberklassen, vor allem der Mittelklassen unserer höheren Schulen beschäftigen soll, aber wesentlich nur Andeutungen und Anregungen geben, also seinen Gegenstand nicht ausführlich behandeln will.

Der erste Teil hat sich bestrebt, die Nützlichkeit und Notwendigkeit eines durch mehrere Jahre hin ausgedehnten anschaulichen geometrischen Unterrichtes darzutun, und er hat dann für diese Unterstufe in Einzelausführungen ein Verfahren angegeben, das eingeschlagen werden kann und das, wenn planmäßig durchgeführt, tatsächlich erfahrungsgemäß das beabsichtigte Ziel erreichen läßt.

Ist in einem solchen ersten Teil der Raumlehre als Unterstufe der Grund gelegt, so wird auf ihm und damit auf Grund einer vorerst genügenden Ausbildung der Schüler im Erfassen von räumlichen Dingen und von einer Reihe ihrer Eigenschaften und Beziehungen weiterhin der zweite Teil, die Oberstufe der geometrischen Lehre aufgebaut werden können, d. i. die sog. wissenschaftliche Behandlung der Geometrie und zwar diese wesentlich im Rahmen und im Umfang des heute in unseren höheren Schulen gelehrten Stoffes.

Nur freilich wird dieser Unterricht nicht in den Bahnen wandeln dürfen und können, der heutzutage der übliche ist, d. h. er wird auch beim Beginn und ersten Verlauf dieses „höheren“ Unterrichtes nicht, jetzt nach den jahrelang gepflegten Übungen im Räumlichen erst recht nicht, sich wiederum für Jahre auf Betrachtungen rein ebener Gebilde sich zurückziehen dürfen, um erst nach Jahren wiederum zur „Stereometrie“ zu kommen. Mir scheint es vielmehr wünschenswert, ja notwendig, auch bei diesem neuen geometrischen Unterricht, wenn er auch in der Hauptsache ein sog. planimetrischer ist und wohl noch für langehin sein wird, die Beziehungen zum Räumlichen nicht aus

den Augen zu verlieren. Es wird sich empfehlen, bei diesem Unterricht stets, wenigstens so oft als möglich und wo sich passende Gelegenheit bietet, einesteils die im Gebiet der ebenen Geometrie erlangten Kenntnisse in ihrer Anwendung oder in der Anwendungsmöglichkeit auf räumliche Gebiete aufzuzeigen und damit stets Ausblicke ins Räumliche zu vermitteln, und anderseits überall, wo dies in natürlicher Weise stattfinden kann und wo sich so ein tieferer Einblick in das Wesen der Sache gewinnen läßt, die Raumfigur als Ausgang zu benützen und aus ihr die gerade vorzunehmenden ebenen Gebilde zunächst abzuleiten oder gewissermaßen abzulesen.

Man mag ja freilich hiergegen einwenden, daß dann manches nicht ganz streng abgeleitet und bewiesen werden könne und daß so der ganze Geist und ein guter Teil der Zweckbestimmung des mathematischen Unterrichtes und der mathematischen Ausbildung unserer Schüler Not leide, indem sich fortwährend aus der Anschauung entnommene, wie man nur sagen könne, vermutlich wahre Aussagen einmischen und sich vermischen mit solchen, die streng bewiesen werden; auf diese Weise schleiche sich leicht in die Auffassung der Schüler eine gewisse Unsicherheit und Unklarheit ein, welche richtiger Ausbildung, d. h. streng logischem Vorgehen nur zum größten Schaden gereichen könne.[1])

Aber gegen solche Befürchtungen läßt sich doch mehrerlei vorbringen. Zunächst sind die Schüler, um die es sich hier handelt, noch nicht geistig so reif, daß sie schon durchweg die strenge Form logischer Schlüsse und Schlußreihen verstehen, verarbeiten und wiedergeben können; sie sollen ja erst zu dieser Stufe des Auffassens und Könnens erzogen und herangebildet werden. Ihr Geist mag sich leicht durch ein so früh schon dauernd strenges Vorgehen abgeschreckt

1) Auch Erler spricht sich ähnlich aus (Schmids Enzyklopädie, 2. Aufl., Bd. 2, S. 927 im Artikel „Geometrie"): „Auch nach einem solchen vorbereitenden Unterrichte darf man im Anfange nicht schnell vorwärts gehen; zugleich ist es bei der Verschiedenheit der Forderungen, welche die wissenschaftliche und anderseits die methodische Behandlung dieses Faches stellt, gerathen, anfänglich von der Strenge der Beweise, wie sie das System verlangt, etwas nachzulassen, insoweit sie ein geübteres Schlußvermögen bei den Schülern voraussetzt, als der betreffenden Altersstufe zuzumuthen ist, wenn auch die summa reverentia, die man der Jugend schuldig ist, es verlangt, daß man ihr nicht als Beweis ausgibt, was nur plausibles Räsonnement ist, und ihr den Ersatz des letzteren durch einen wirklichen Beweis verheißt und im späteren Unterricht gewährt . . ."

Und Höfler (Nr. 137, S. 29 bis 31) redet mit Berufung auf den Astronomen W. Förster und auch auf Dühring einem Anfangs-Mathematik-Unterricht in gewissem Sinn „selbst auf Kosten der Gründlichkeit" das Wort, und er glaubt durch seine Vorschläge für die Unterrichtsgestaltung am besten zu „zeigen, wie der anfänglich nur scheinbaren Ungründlichkeit, die eben nur das Voranstellen didaktischer Rücksichten vor verfrühte ‚Wissenschaftlichkeit' ist, die strengste dem Schüler überhaupt noch zugängliche Wissenschaftlichkeit immer noch rechtzeitig folgen kann".

fühlen; wenn also das Einmischen mehr oder ganz anschaulicher Dinge auch nur den Vorteil der Abwechslung und der Anregung der Phantasie und der Hinlenkung auf die körperliche Welt und damit auf das Gebiet der Anwendungen mit sich brächte, so wäre dies gewiß auch für den sonst streng logisch aufbauenden Unterricht ein Gewinn.

Dann aber wird bei dem hier vorgeschlagenen Verfahren der Lehrer und die ganze Art und Gestaltung des Unterrichtes dafür sorgen müssen, daß völlig Wahres und nur Wahrscheinliches, daß einstweilen als richtig Vermutetes und anderes als streng richtig Abgeleitetes deutlich unterschieden und in ihrer verschiedenen Wesenheit klar hervorgehoben und als solches gekennzeichnet werde; bei richtiger Behandlung und passender Verteilung von Licht und Schatten wird dann vielmehr immer erneut der Wunsch erweckt werden können und das Verlangen rege gemacht werden, auch das bis dahin nur als vermutlich Richtiges Aufgefaßte ebenfalls streng bewiesen zu sehen.

Und wenn vielleicht mancher einer solchen Möglichkeit etwas zweifelnd gegenüberstehen möchte, so wird doch das nicht bestritten werden, daß, wenn wir Lehrer das Vorgeschlagene auch nicht mit Absicht durchführen wollten, der vordrängende Geist der Jugend und ihre lebhafte Einbildungskraft schon von selbst dem streng beweisenden Gang des Lehrers voraneilen oder neben ihm auch den eigenen Weg zu gehen versuchen wird; so kann und wird dann auch ohne Beihilfe des Lehrers eben das naturgemäß erfolgen, was er selbst als nach seiner Meinung schädlich unterlassen sehen möchte. Bei solchem Lauf der Dinge dürfte es dann doch besser sein, ein derartiges scheinbares Abschweifen in den eigenen Lehrgang selbst aufzunehmen.

Und dann noch ein weiteres: das Fortschreiten wohl in jeglichem Lehrgebiet, jedenfalls im Gebiete des mathematischen Unterrichtes, besteht sicherlich nicht nur im Zufügen des aus dem Vorangehenden als notwendig Folgenden oder des aus ihm Ableitbaren; gar manches wird gewissermaßen sprunghaft erfaßt und oft genug instinktiv vorweggenommen und geahnt, was der regelrechte Unterricht erst an späterer Stelle zu bringen und dann als wohl begründet zu bieten vermag. Die richtige Unterrichtskunst wird sich aber den Vorteil eines gewissermaßen selbstschöpferischen Mittuns und Mitarbeitens einer regen Schülerphantasie nicht entgehen lassen, sie wird auch solch einstweilen nur Geahntes beizuziehen verstehen, wird es gelegentlich besprechen und auch zu ähnlicher „Forschung“ anregen; aber sie wird auch, wie schon gesagt, derart Gefundenes nach seinem Wert und nach seiner Einreihungsmöglichkeit kennzeichnen. Hiermit ist zugleich auch die Möglichkeit gegeben, neben der fortschreitenden „strengen“ Beschäftigung mit den gerade vorliegenden geometrischen Gebilden nebenbei stets neuen Anschauungsstoff herbeizuschaffen, der weiterhin verarbeitet werden kann und muß.

76. An dieser Stelle darf und soll nun auch das vorgebracht werden, was früher (S. 58) als betreffs der sog. Meraner Vorschläge für die Mittel- und Oberklassen zu sagen in Aussicht gestellt worden ist.

In den „Erläuterungen zu dem mathematischen Lehrplan“ der höheren Schulen ist zwar für den geometrischen Unterricht ausdrücklich die folgende Bestimmung aufgenommen (Gutzmer S. 112): „Bei den planimetrischen Betrachtungen ist, wo es irgend geht, der Zusammenhang mit den Verhältnissen des dreifach ausgedehnten Raumes lebendig zu erhalten, namentlich auch durch Heranziehung geeigneter Anschauungsbeispiele aus der Wirklichkeit. Auch empfiehlt sich die Benutzung von Modellen.“ Aber diese Bestimmung findet sich nur unter Nummer 1) als Vorschrift für die unteren Klassen — von einer Beiziehung und Berücksichtigung von Raumbetrachtungen auch beim nachfolgenden Unterricht in ebener Geometrie der Mittelklassen oder gar von einer steten Durchdringung desselben mit solchen ist ganz nnd gar nicht die Rede. Und das scheint mir bei der Aufstellung eines neuen Lehrplanes oder auch nur von Grundzügen oder Richtlinien eines solchen ein entschiedener Mangel.

Für Obertertia wird ja die „Wiederholung der schon in Quinta vorgekommenen Raumberechnungen“ gefordert; aber hiermit wird doch wesentlich die rechnerische Seite der bezüglichen Beschäftigung in erste Reihe gestellt, die darüber hinausgehende absichtliche Fortführung der Raumstudien ist darin kaum inbegriffen.

Für die ganze Sekunda-Unterweisung fehlt — außer in der nach gewöhnlicher Auffassung irreführenden Überschrift „Raumlehre“ — jegliche Rücksichtnahme auf räumliche Betrachtung und deren Verknüpfung mit den Lehren der ebenen Geometrie; es sollte doch mindestens die Anlehnung der letzteren an räumliche Figuren und deren Verhältnisse verlangt sein. Und wenn also erst in Unterprima „Stereometrie“ als Aufgabe erscheint, so bleibt hiernach (— abgesehen von der geringen und uneigentlichen Einschiebung in Ober III —) die Übung und „Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ durch volle fünf Jahre des Lehrplans und der geistigen Entwickelung der Jugend brach liegen, und es finden insbesondere die Bedürfnisse der aus Sekunda sei's ins Leben sei's in Fachschulen technischer Art übertretenden Schüler zu wenig Berücksichtigung; es wird wiederum wie in fast allen heute bestehenden Lehrplänen deutscher Mittelschulen die Ausbildung der doch nur in geringer Verhältniszahl die Prima durchlaufenden Schüler und der Abiturienten ins Auge gefaßt.

Es sollte doch wohl diesem vorstehend gekennzeichneten und gerügten Übelstand entgegengetreten werden, und ich glaube, daß manches Gute und vom Unterrichtsausschuß geforderte Bessere wohl erreicht werden kann.

Nach den vorangehenden allgemeinen Erwägungen, die wohl meinen Vorschlag mit unterstützen und rechtfertigen mögen, wollen wir nun zu dem Einzelnen übergehen, das hier vorgebracht werden soll. Dabei sei aber nochmals bemerkt, daß dieser Gegenstand nicht mit der Ausführlichkeit des ersten Teiles behandelt werden wird; es soll wesentlich nur Anregung dazu gegeben werden, in die althergebrachte Gestaltung oder Reihenfolge des geometrischen Unterrichtes verschiedenes zur eigentlichen Raumlehre Gehöriges einzufügen.

Denn es wird schon nicht angehen, im planimetrischen, zumal in dem an den vorbereitenden Anschauungsunterricht sich zunächst anschließenden geometrischen Unterricht räumliche Betrachtungen grundsätzlich ganz ausschließen zu wollen. Ein solches Verfahren ist ja an sich schon gar nicht durchführbar: z. B. die Deckungsfähigkeit zweier Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen, ist durch bloßes Arbeiten in der Ebene, durch einfaches Überschieben nicht zu erweisen, deren Deckung ist nicht zu erreichen, wenn der „Sinn“ in der Aufeinanderfolge der entsprechend gleichen Seiten beider Dreiecke nicht übereinstimmt; also wäre entweder der betreffende Satz nicht wahr oder der Nachweis seiner Richtigkeit bedarf des Umwendens im Raum.

Dann meinen wohl manche „Strengen“ [— wenn sie es auch nicht ausdrücklich sagen, wohl aber danach handeln —], man solle solches Hereinziehen räumlicher Beihilfen in die ebene Geometrie oder das Übergreifen der Planimetrie in die Raumbetrachtung möglichst einschränken, eben nur an den Stellen zulassen, wo es nicht vermieden werden kann. In diesem Sinn und Gedankengang wird wohl der Lehrsatz, daß im gleichschenkeligen Dreieck die Winkel an der Grundseite einander gleich sind, erst dann gebracht und bewiesen, wenn der betreffende (sog. erste) Kongruenzsatz behandelt ist, und zwar wird er dann entweder unter Benützung der Halbierenden des Winkels an der Spitze bewiesen oder gar ohne die Halbierende (nach Euklid I, 5) durch Ansetzen je gleicher Strecken an die Schenkel des Dreiecks, jedenfalls aber so, daß man fein säuberlich in der Ebene verbleibt und ja nicht räumliche Betrachtung verwendet. Und doch sollte man froh sein, gerade hier auf ein sich naturgemäß darbietendes Beispiel zu stoßen, das als besonderer Fall der Deckungsfähigkeit ganz wohl in die allgemeinere Behandlung einzuführen vermag. Und dann hätte bei den genannten Arten der Beweisführung Schopenhauer doch wohl recht mit seiner Anklage gegen die „Mausfallenbeweise“: die Richtigkeit der Behauptung wird sicherlich dargetan und der Lernende muß sich den vorgebrachten Gründen gefangen geben; aber der wahre Grund bleibt so eben doch verborgen. Denn er liegt gerade darin, daß das ganze Dreieck nach Umwenden im Raum in

neuer Lage mit dem vorigen unmittelbar zur Deckung gebracht werden kann oder daß der eine Teil des Dreiecks um die Halbierende seines Winkels an der Spitze umgewendet und mit dem anderen Teil zur Deckung gebracht werden kann. Ein solches Verfahren ist einleuchtend und überzeugend, weil der wahre Grund der Sache, die Symmetrie der Figur aufgedeckt wird; daß dabei zugleich der Einzelsatz in die ganze Betrachtung symmetrischer Figuren eingereiht werden kann und wohl auch eingereiht wird, ist ein nicht zu unterschätzender Nebenvorteil. Auch Fresenius (Nr. 22, S. 173) kommt zu der Schlußbetrachtung: „Auch Euklids Konstruktionen, so unwegig sie sind, fußen doch auf demselben Prinzip der Symmetrie, wie wir sie als Umwendbarkeit bezeichnet haben.“

Also: grundsätzliches Ausschließen jeglicher Benützung des allgemeinen Raumes beim Betrachten von Gebilden der Ebene ist unstatthaft. Im Gegenteil, räumliche Betrachtungen in der ebenen Geometrie sind nicht nur bloß zuzulassen, sondern sie sind im Unterricht grundsätzlich zu pflegen — denn nicht nur werden hierdurch manche Eigenschaften oder Beweise deutlicher erkennbar, weil sinnenfälliger[1]), sondern manche sonst getrennt bleibenden Gegenstände des Unterrichtes rücken so in der Erkenntnis nahe zusammen und stützen einander gegenseitig, und gleichzeitig wird so Sinn und Verständnis des Schülers auch stets auf das Allgemeinere und nicht Schwerere in der Betrachtung hingelenkt. Hierzu kommt der Vorteil, daß der Raumsinn des Schülers dabei stets in Übung erhalten und seine Einbildungskraft in passender Weise angeregt wird.

Beispiele für die hier ausgesprochene Ansicht sind leicht zu beschaffen, ja sie drängen sich förmlich auf. Hier sei nur eines besonders erwähnt, das naheliegendste, die achsiale Symmetrie (oder Spiegelgleichheit) in der Ebene. Gewiß könnte hierbei ein „reiner“ planimetrischer Unterricht auch ohne Raumbeiziehung auskommen: Antragen gegengerichtet gleicher Strecken auf der Senkrechten von der Achse aus und Antragen gegenwendig gleicher Winkel führen unzweifelhaft zu den gewünschten Paaren von Punkten und Geraden und damit zu allem Zusammengesetzteren — aber welcher Lehrer möchte sich wohl den Versuch oder die Grundlegung entgehen lassen, durch Falten eines Papieres von einem Tintepunkt (von einer Geraden, von irgend einer Profilzeichnung) durch Abdruck vor den Augen der Schüler das Spiegelbild zu erzeugen und dann erzeugen zu lassen? Sollte eine solche Beiziehung des Räumlichen die Sache vielleicht erschweren? Oder reiht sich dem nicht naturgemäß die Erwähnung, die Aufsuchung, die kurze Betrachtung räumlieh symmetrischer Ge-

1) Vgl. die gleichlautenden Ansichten von Monge (1797) und Gergonne (schon 1826) und ihrer nächsten Nachfolger oder Mitarbeiter.

bilde wie notwendig an? und dies um so mehr, als der naturgeschichtliche Unterricht gerade diesen Teil der geometrischen Lehre schon Jahre vorher vorweggenommen und praktisch verwertet hat? — Weitere Beispiele werden sich im folgenden ergeben.

77. Wir wollen nun wenigstens einen Teil des üblichen geometrischen Lehr- und Lernstoffes in Gedanken an unserem Auge vorüberziehen lassen — wir werden leicht an einer Reihe von Stellen die Möglichkeit und das Vorteilhafte der Beiziehung räumlicher Betrachtung erkennen können.

a) Schon in den ersten Anfängen, wenn die Hauptsache (samt reichlichen Übungen) über Strecken und Winkel durchgenommen ist, wird sich der Lehrer nicht wohl die Gelegenheit entgehen lassen, die schon in diesen Grundgebilden sich einstellende **Dualität** auch ausdrücklich festzustellen, hervorzuheben und entsprechende Übersetzungsübungen vorzunehmen, etwa in der Weise, wie sie hier durch Gegenüberstellung angedeutet ist:

Ein Punkt A.	Eine Gerade a.
Beliebig viele Geraden durch A.	Beliebig viele Punkte auf a.
Ein zweiter Punkt B.	Eine zweite Gerade b.
Beide Punkte bestimmen die Gerade (Verbindungsgerade) $= g$.	Beide Geraden bestimmen den Punkt (Schnittpunkt) $= P$.
Fortschreitende Bewegung (Translation).	Drehende Bewegung (Rotation).
Auf g Wandersinn AB oder BA.	Um P Drehungssinn ab oder ba.
Auf g die Strecke AB.	Um P der (eine) Winkel (ab).
Dritter Punkt C.	Dritte Gerade c.
— kann liegen auf g oder außer g.	— kann gehen durch P oder an P vorbei.
Wenn auf g, so entweder die Strecke selbst teilend — oder auf der Verlängerung.	Wenn durch P, so entweder den Winkel selbst teilend — oder dessen Nebenwinkel.
Im ersten Fall $AC + CB = AB$.	Im ersten Fall $\sphericalangle ac + cb = ab$.
Besondere Lage: Mittelpunkt.	Besondere Lage: Winkelhalbierende.
Im zweiten Fall uneigentliche Teilung, dabei Vor- und Rückbewegung.	Im zweiten Fall uneigentliche Teilung, dabei Vor- und Rückdrehung.
. . . .	. . . .
Dritter Punkt C nicht auf g: Dreieck.	Dritte Gerade nicht durch P: Dreiseit.
Drei Ecken und drei Seiten.	Drei Seiten und drei Ecken.

usw.

(Später Wiederholung und Fortsetzung.)

Sollte sich hier nicht aufs schönste die Ebene als drittes Grundgebilde anfügen lassen?[1] Sollte die gleichartige Entwickelungsgestaltung (soweit sie durchführbar) nicht Freude und den Sinn für gesetzmäßige Bildung schon von vornherein erwecken? Und warum sollte, dürfte, könnte die Beiziehung der Ebene um drei oder vier Jahre hinausgeschoben werden, da sie sich in Erdkunde und Naturgeschichte ja doch eindrängt? Und sollte die Beiziehung der Ebene nicht möglich und ratsam sein, wenn auch an dieser Unterrichtsstelle nicht alle bezüglichen Eigenschaften streng beweisbar sind? (z. B. schon die, die hier nicht bewiesen zu werden braucht, daß die Schnittfigur zweier Ebenen i. a. eine Gerade ist). Also es läßt sich ganz wohl die folgende Beifügung durchführen:

Eine Ebene — Zwei Halbräume — Zweite Ebene — Schnittgerade — Zweiflach (Keil) — Neigungswinkel als Maß des Zweiflachs (herauszufinden durch Einschieben verschieden großer Winkelmodelle in das Zweiflach).

b) Als einer der Hauptunterschiede altgriechischer und neuzeitlicher Geometrie gilt das, daß in jener die Figuren sämtlich als starr und fest gegeben angenommen werden, in dieser als beweglich und gewissermaßen fließend, **in stetem Übergang von einer Gestaltung zu anderen** begriffen. Sollen unsere Schüler in die heutige Form der Wissenschaft und gar gelegentlich in deren Anwendung eingeführt werden, so müssen auch sie beizeiten daran gewöhnt werden, die Figuren als jeden Augenblick veränderlich zu denken und dabei auf die gegenseitige Abhängigkeit ihrer Stücke zu achten, diese zu erraten, bald auch die dabei herrschende Gesetzmäßigkeit erfassen und beweisen zu können.

Der Auffassung der Figuren als starrer Gebilde kann und muß in verschiedener Weise entgegen gearbeitet werden.

Das eine hierzu Erforderliche ist das Beweglichmachen der Teile einer Figur. Modelle, möglichst solche mit Gelenken oder Scharnieren, tun hierbei die besten Dienste. Man wird zeigen, daß das Quadrat in eine Raute, daß das Rechteck in ein schiefes Parallelogramm übergeführt werden kann, und daß die Abänderung der Größe eines Winkels hierbei die Abänderung der übrigen drei Winkel (aber nicht der Seiten) bedingt. Man wird ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seiten an den Ecken gelenkend verbunden sind, durch Ändern der Winkel in ein bloß gleichseitiges abändern; man wird aus einem gleichseitigen Dreieck durch Abschneiden kleiner gleichseitiger Dreiecke an den Ecken ein zwar gleichwinkeliges, aber nicht gleichseitiges Sechseck ableiten und erst durch weiteres Abschneiden zu dem nun auch gleichseitigen, somit zum regelmäßigen Sechseck gelangen. Ähnlich zum

1) Das gleiche befürwortet Höfler (Nr. 137, S. 114).

Achteck vom Quadrat aus, und man wird überhaupt so durch aufeinanderfolgendes Bewirken der Gleichseitigkeit und der Gleichwinkeligkeit den Begriff der Regelmäßigkeit von Vielecken herbeiführen. Man wird mittels der Schwungmaschine die Überführung eines Kreises in eine Ellipse vorführen u. dgl. m.

Hierbei kann wohl auch ein zweites miterledigt werden: die Erzeugung der Grenzfälle. Man wird bei dem benützt gedachten Quadrat- oder Rechteckmodell durch volles Zusammenlegen der Stäbe die Strecke erzeugen; man wird (zwar nicht bei Benützung der Schwungmaschine, wohl aber) beim Zeichnen der Ellipse mit der Faden- oder sog. Gärtnerkonstruktion durch Vergrößerung des Brennpunktabstandes zur (doppelt gedachten) Strecke gelangen; man wird aus dem Viereck durch allmähliche Vergrößerung eines Winkels, bis dieser ein gestreckter geworden, das Dreieck ableiten; man wird das Trapez durch Parallelverschiebung der kleineren Parallelseite schließlich in ein Dreieck ausarten lassen u. dgl. m., jedes an seinem Platz.

Als drittes soll hier erwähnt werden das Bewegen nicht bloß der Figurenteile gegeneinander, sondern das Bewegen der ganzen Figur, sei's in der Ebene, sei's im Raum. Schon die ersten Unterrichtsstunden der sog. wissenschaftlichen Geometrie haben an zahlreichen und deutlich, d. i. möglichst sinnenfällig (zum Teil mit Benützung der Schwungmaschine) vorzuführenden Beispielen die mögliche Entstehung der Linie aus der Bewegung des Punktes, die der Fläche aus der Bewegung der Linie abzuleiten, um so der wissenschaftlichen Auffassung gerecht zu werden und zugleich die Raumvorstellung der Schüler möglichst zu üben. Aber auch weiterhin sind die Bewegungen der Figuren reichlich zu benützen, ja es dürfte sich empfehlen, einen guten Teil des Beweisverfahrens zunächst der ebenen Geometrie auf passend verwendete Bewegungen zu gründen.[1]) Solche Bewegungen sind das Drehen, im besonderen die Umdrehung in der Ebene, das Drehen um eine Gerade im Raum, im besonderen das Umwenden, endlich das Verschieben sowohl in der Ebene als im Raum. Alle diese Bewegungen sollten grundsätzlich beigezogen und schon im Anfangsunterricht verwendet werden, wenn es auch nur wäre, um fortwährend die Raumvorstellung anzuregen; aber der Sinn dieser Verwendung liegt tiefer, sie ermöglicht einheitliche Beweisverfahren und gibt an Stelle der üblichen Kongruenzbetrachtungen, die vielfach nur die Wahrheit einer

1) J. Henrici und ich, wir haben ein „Lehrbuch der Elementargeometrie“ herausgegeben, in dem dieser Gedanke praktisch durchgeführt ist. Schon in der ersten Auflage des ersten Teiles vom Jahr 1881 (Vorwort S. III) heißt es da: „Gegenüber der Starrheit und Unbeweglichkeit der geometrischen Gebilde bei Euklid führt in der modernen Betrachtungsweise die Entstehung der Gebilde durch Bewegung und die Änderung ihrer Lage zu einer größeren Anschaulichkeit und natürlicheren Beweisführung.“

Behauptung dartun, einen Einblick, vielmehr die Einsicht in die wahre Ursache des Wahrseins. Damit wird auch der bekannten, richtig empfundenen, wenn auch am unrechten Beispiel vorgebrachten Forderung Schopenhauers in der Tat entsprochen.

c) Ist der Unterricht zu der Figur gelangt, bei der zwei Parallelgeraden von einer dritten geschnitten werden, und sind die betreffenden Sätze erfaßt und geübt, so darf wohl, scheint mir, mindestens eine kurze anhangsweise Erwähnung **zweier Parallelebenen** stattfinden, die nun auch von einer dritten Ebene durchschnitten werden. Ja, es dürfte sogar naheliegen, von den Gebilden im Raum auszugehen und erst von diesen aus auf die der Ebene überzugehen. Die Beispiele hierfür, im Schulzimmer und auf der Straße leicht auffindbar und hundertfältig begegnend, sind die eigentlich lebensvollen, und ihnen gegenüber könnte man sogar jene rein planimetrische Betätigung als abstrakt und nur durch das gelehrte System bedingt erklären. Gewiß soll der Schüler die Gedanken der Planimetrie redlich durchdenken und, wenn nötig, mit Mühe durcharbeiten; aber man sollte ihm den Ausblick gönnen auf die Benützbarkeit seiner neu erworbenen Kenntnisse nicht bloß bei den sich anreihenden Zeichenübungen, sondern auch auf deren Benützbarkeit im „Leben“. Solches Verfahren wird Teilnahme erregen am Fortgang des Unterrichtes, die wahre Bedingung zu dessen Gedeihen und lebendiger Erfassung.

d) Ein anderer Abschnitt ebener Geometrie, an den sich naturgemäß räumliche Betrachtungen anschließen können und anschließen sollten, ist die Lehre von den Strecken, die von einem Punkt aus nach einer Geraden gezogen werden können, dabei das Auftreten einer einzigen Senkrechten und von vielen verschieden großen, paarweis gleichen schiefen Strecken. Hier dürfte sich gewiß gut die entsprechende **Beziehung zwischen einem Punkt und einer Ebene außer ihm** anschließen und leicht erörtern lassen, wenn auch die strenge Erklärung des Senkrechtstehens einer Geraden auf einer Ebene noch nicht gegeben werden kann oder noch nicht gegeben zu werden braucht Aber es reicht hierbei völlig aus, auf die Anschauung und das Gefühl sich zu stützen, wenn vom „Abstand“ eines Lichtpunktes (einer Flamme) von einem Tisch und von den mehr oder minder schräg auf den Tisch auffallenden Lichtstrahlen und von deren verschieden hell machender Wirkung die Rede ist. Und der geometrische Teil beim Karussell oder Zirkus oder Turmgebälk, betreffs seines Mittelstammes und seiner schräg gestellten Eisenstäbe oder Hanfseile oder Holzsparren, wird gewiß von den Schülern gewürdigt und, fast möchte ich sagen, richtig eingeschätzt, wenn auch der Lehrsatz nicht erwiesen worden ist, daß eine Gerade auf einer Ebene (d. h. auf . . .?) senkrecht steht, wenn sie im Schnittpunkt zweier ihrer Geraden zu jeder von diesen senkrecht steht. So wird Anregung gegeben weit

über das augenblickliche Lern- und Schulgebiet hinaus, und Raumauffassung wird gepflegt, auf die nicht gewartet werden darf, bis der Schüler in Unterprima angelangt sein wird, wenn er überhaupt bis dahin vordringt.

Und im Anschluß an die eben erwähnte Grundfigur dürfte wohl auch von der **Kegelfläche** die Rede sein, welche die vom Punkt außerhalb nach der Ebene ziehbaren oder gezogenen schiefen Strecken gleicher Länge bilden; denn diese Kegelfläche zu bilden ist das Ziel des Zirkusbaues und der Bedachung des Rundturmes. Eine Reihe von Beispielen kann dartun, wie leicht und naheliegend die bezüglichen Raumbeziehungen den Schülern erscheinen.

e) Die zuletzt in Betracht gezogene Figur der Kegelfläche und ihres Bodenkreises steht offenbar in engster Beziehung mit der **Betrachtung der Kugel** oder läßt sich in eine solche Beziehung bringen. Es ist ja nicht systematisch, in der ebenen Geometrie auch der Kugel Erwähnung zu tun — und doch erscheint nichts gewissermaßen natürlicher, als unmittelbar nach der Einführung des Kreises (— an welcher Stelle des Lehrgebäudes diese auch erfolgen mag, ob früh oder spät —) alsbald mindestens anhangsweise auch der Kugelfläche ein Wort zu widmen. Dies erscheint um so mehr ratsam, als der erdkundliche Unterricht Jahr um Jahr die Kugel und ihre Haupteigenschaften ins Auge zu fassen hat und davon Anwendung machen muß. Also man zeige (— ja man beweise fast —) am Apfel und am Kugelmodell, daß der ebene Schnitt einer Kugelfläche eine Kreislinie ist, daß diese um so größer wird, je näher dem Mittelpunkt der Schnitt geführt wird, daß sie also am größten, also ein Hauptkreis wird, wenn der Schnitt durch den Mittelpunkt selbst gelegt wird; die Erläuterung der Begriffe „Parallelkreis" und „Meridian" ergibt sich hierbei von selbst. Und da das Wesen und die Ursache der Mondsichelgestalt doch einmal erklärt werden muß, so mögen sich an die genannten Betrachtungen die weiteren Versuche anreihen, eine Kugelfläche, deren eine Hälfte andersfarbig angestrichen worden, um einen Durchmesser des Grenzkreises beider Hälften langsam umzudrehen: die Übergänge der Erscheinungsform werden deutlich hervortreten.

f) Die Deckungsfähigkeit von Dreiecken wird ja zunächst am besten in der Erscheinungsform und in der Ausdrucksweise des Eindeutigbestimmtseins eines Dreiecks aus gewissen seiner zusammen gegebenen Stücke behandelt. Es dürfte aber wohl auch ratsam sein, dem vorher erwähnten Zweiflach eine dritte, dessen Kante parallele Ebene zuzufügen und so einen dreiseitigen prismatischen Raum zu bilden und diesen nun durch zwei neue parallele Ebenen voll abzugrenzen: hier erscheinen in den Begrenzungs- oder Endflächen **deckungsfähige Dreiecke.** Anstatt weiterhin, um auf deckungsfähige Vielecke zu kommen, bloß Dreieck an Dreieck anzureihen, dürfte es

sich wohl empfehlen, parallele ebene Durchschnitte durch einen vielseitigen prismatischen Raum, d. h. die vieleckigen Endflächen parallel begrenzter Prismen vorzuführen als Beispiele jener bestimmten Vielecke. So kann die abstrakte Untersuchung in das Gebiet der besten Anschaulichkeit und der praktischen Verwendbarkeit verlegt und damit anregender gestaltet werden.

g) Einen ganz gleichen Vorteil kann man sich bei der Lehre von den **ähnlichen Figuren** verschaffen. Die bezügliche euklidische Erklärung (Buch VI, Anfang) nimmt bekanntlich Bestandteile unmittelbar als zusammenbestehend an, deren gleichzeitige Annahme zuvor bewiesen werden müßte; außerdem ist sie nur auf geradlinige Figuren anwendbar. Demgegenüber hat eine andersartige Ableitung und Erklärung ähnlicher Figuren von deren ähnlicher Lage her ihren Ausgang genommen, und sie entspricht der heutigen Auffassung von der Ähnlichkeit als einer besonderen Art der sog. Verwandtschaft; von ihr aus ist durch Vermittelung des Strahlenbüschels oder Strahlenbündels (Parallelstrahlenbüschels- und -bündels) leicht zu den höheren Graden der Verwandtschaft der Zugang eröffnet sowie die Deckungsfähigkeit als besonderer Fall der Ähnlichkeit ableitbar. Warum soll nun nicht auch durch wirkliche Vorführung eines Prismas und einer Pyramide, welche beide von einer parallel verschiebbaren oder um eine Achse drehbaren Glasplatte durchschnitten sind,[1]) je an der betreffenden Stelle der Lehre die Anschaulichkeit ermöglicht oder unterstützt werden? und jeweils schon auf niedrigerer Stufe der Ausblick auf die höhere eröffnet werden? Hierbei wird dann leicht auch [durch Überführen der Glasplatte mit ihrer darauf gezeichneten Schnittfigur in die Ebene der Grundfläche der beiden Körperarten] die Verschiebungslage deckungsfähiger Figuren in ihrer Entstehung dargetan, und es entstehen so auch vor den Augen der Schüler die Verwandtschaftslagen affingleicher, affiner, ähnlicher und projektiver Figuren. Wenn selbstverständlich auch hierbei die vollen Eigenschaften der betreffenden verwandten Figuren nicht abgeleitet, ihre mathematischen Beziehungen nicht erwiesen werden können, so bietet sich doch auf solchem Weg eine außerordentliche Anregung, und es entsteht in der Seele des Schülers ein Vorahnen dessen, in der des lebendigeren Schülers der Wunsch und das Verlangen nach Beweis dessen, was kommen mag und was kommen wird — es bedarf nur einer richtigen Behandlung der Sache von seiten des Lehrers, einer Behandlung, die genügend viel gibt und ahnen läßt, aber auch vorsichtig zurückzuhalten versteht. Werden dann später dieselben oder entsprechenden

1) Solche Modelle sind auch in die Gruppe der oben (S. 121 f.) erwähnten „Mathematischen Modelle“ mit aufgenommen, die im Verlag von Teubner-Leipzig erschienen sind.

anschaulichen Vorführungen (Modelle) benützt, wenn die strenge Behandlung des Stoffes beginnt, so schlagen sie von selbst die Brücke vom früher Erlernten zum Neuen und ermöglichen leicht den Aufstieg von der niedrigeren Stufe der Erkenntnis zu der höheren. Den Schülern aber, die nicht zu den höheren Stufen vordringen, sind wenigstens einige Lichtstrahlen von oben her zuteil geworden.

h) In die gleiche Reihe der Verdeutlichung planimetrischer Dinge durch Mitverwendung räumlicher gehört auch als weiteres Beispiel die **Beziehung zweier Kreise in der Ebene.** Es genügt m. E. nicht, an einem passenden Modell das allmähliche Entstehen der verschiedenen möglichen Lagen zweier beliebigen Kreise (und damit das Entstehen von Finsternissen bei Sonne und Mond) darzutun und so die bekannten Beziehungen zwischen den Halbmessern der Kreise und dem Abstand ihrer Mittelpunkte am Modell ablesen zu lassen. Wenn das Auftreten und die Untersuchung der Potenzgeraden (Chordale) zweier Kreise vorgeführt wird, so dürfte und sollte sich der Unterricht nicht, wie dies vielfach geschieht, mit bloß rechnerischen Nachweisen genügen lassen; auch der Anschauung sollte ihr Recht werden. Und was ist hier natürlicher als das Schneidenlassen einer Kugelfläche durch zwei Ebenen, die auf ihr zwei (auseinander liegende oder einen Punkt oder zwei Punkte gemeinsam besitzende) Kreislinien entstehen lassen; deren Umklappen in eine Ebene macht das Auftreten und Hereinkommen der Potenzgeraden zumal auch in dem Falle des Nichtschneidens beider Kreislinien unmittelbar ersichtlich und klärt über die Sache anders auf als wenn die Ebene nicht verlassen oder wenn gar nur gerechnet wird. Das Rückdrehen der einen Ebene mit ihrer Kreislinie in neue und neue Lagen macht auch unmittelbar das Auftreten der zwei verschiedenen, durch die Kreislinien bestimmten Kegelflächen ersichtlich, und diese im Geiste sehen zu lassen, auch wenn ihre Natur vielleicht noch nicht an der betreffenden Stelle des Unterrichtes sollte erwiesen werden können oder wollen, ist unzweifelhaft wünschenswert, klärt auf, fördert die innere Anschauung und erweckt Interesse.

i) Als letztes Beispiel mag die an das Vorangehende sich anschließende doppelte Möglichkeit **perspektiver Beziehung zweier Kreise** in der Ebene kurz erwähnt werden, sowie die auf unendlichviele Weisen mögliche perspektive Beziehung (Zentralprojektion), die einen gegebenen Kreis in sich selbst überführt. Auch hierbei gewähren die an der Kugel anzustellenden, also räumlichen Betrachtungen großen Vorteil und klären unzweifelhaft ganz anders und besser über die betreffenden Gesetze auf als dies rein ebene Betrachtungen vermöchten, bereiten aber auch gleichzeitig in schönster Weise auf das Studium der Kegelschnitte vor. (Man vergleiche hierzu etwa das „Lehrbuch der Darstellenden Geometrie“ von K. Rohn und E. Papperitz, 1. Bd. in zweiter Auflage, S. 178—196).

78. In der Besprechung der letztvorangehenden Nummer wurden Beispiele vorgebracht, die aus dem ganzen Gebiet der üblichen Schulgeometrie von Untertertia, selbst von Quarta ab bis Prima entnommen sind. Sie alle sollten zeigen und hoffentlich haben sie es gezeigt, wie sehr wünschenswert es ist, den heutzutage wohl durchweg gebräuchlichen Gang innerhalb der Lehre von den ebenen Gebilden an allen möglichen passenden Stellen durch Beiziehung von entsprechenden Raumgebilden und deren Betrachtung zu unterbrechen, um so die Schüler der wiederholt erwähnten Vorteile und des verschiedenseitigen Nutzens teilhaftig werden zu lassen, die eine solche andersartige, das Ebene und das Räumliche vielfach verschmelzende Behandlung gewähren kann.

Naheliegend wäre hier die Frage und deren Beantwortung, ob es sich nicht empfehlen dürfte, im Schulunterricht die seit mehr als zweitausend Jahren herkömmliche völlige Scheidung zwischen ebener und räumlicher Geometrie grundsätzlich aufhören zu lassen und statt dessen gleich vom Beginn geometrischer Lehre ab durchgehend eine **Verschmelzung („Fusion“) beider Gebiete** vorzunehmen, um so eine wahre Kunde vom Raum, eine wahre „Raumlehre“ zu vermitteln. In Frankreich und Italien sind ja seit den letzten Jahrzehnten ernstliche Bestrebungen in dieser Richtung hervorgetreten, und es ist eine Reihe praktischer Versuche mit der „Fusion“ durchgeführt worden, denen guter Erfolg zugeschrieben wird; in Deutschland ist es in dieser Beziehung ziemlich stille geblieben, und seit Bretschneider (1844) sein im Sinn der Verschmelzung abgefaßtes „Lehrgebäude der niederen Geometrie“ herausgegeben, ist kaum mehr in gleicher Richtung ein entsprechendes Vorgehen bekannt geworden. Und doch scheint mir, daß zur Entscheidung der Frage und zur vielleicht möglichen Verbesserung und Vertiefung des geometrischen Unterrichtes jedenfalls auch bei uns praktische Versuche angestellt werden müßten. Sie allein mögen über eine zulässige Änderung des Lehrverfahrens entscheiden.

Einstweilen dürfte mindestens die von mir vorgeschlagene leichte und überall innerhalb des jetzigen Unterrichtsrahmens durchführbare Belebung durch Raumbetrachtungen ihr Gutes haben.

Anhang:

Verzeichnis von Schriften über den geometrischen Anschauungsunterricht.

A. Geordnet nach der Zeitfolge.

1803. 1. Pestalozzis Elementarbücher: a) ABC der Anschauung, oder Anschauungslehre der Maßverhältnisse. 1. Heft (84 S.) u. 2. Heft (148 S.) — b) Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse. 1. Heft (175 S.) u. 2. Heft (251 S.). Zürich und Bern (H. Geßner) und Tübingen (Cotta). 1803.

1809. 2. Jos. Schmid, Die Elemente der Form und Größe (gewöhnlich Geometrie genannt) nach Pestalozzis Grundsätzen bearbeitet. 1. Teil (376 S.) u. 2. Teil (230 S.). Bern, A. Haller. 1809.

1815. 3. J. J. J. Hoffmann, Geometrische Anschauungslehre. Eine Vorbereitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie. 1. Aufl. (1815), 2. Aufl. Mainz, Kupferberg, 1818 (171 S.).

1817. 4. J. G. Graßmann, Raumlehre für Volksschulen. 1. Teil: Ebene räumliche Verbindungslehre. Berlin, Realschulbuchhandlung, 1817 (175 S. in klein 8°). — 2. Teil: Raumlehre für die unteren Klassen der Gymnasien, und für Volksschulen (Ebene räumliche Größenlehre). Berlin, Reimer. 1824. (298 S. in klein 8°.)

1820. 5. J. J. J. Hoffmann, Stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre. Eine Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Stereometrie. Mainz, Kupferberg. 1820. (224 S.)

1821. 6. W. Harnisch, Die Raumlehre oder die Meßkunst, gewöhnlich Geometrie genannt; mit gleichzeitiger Beachtung von Wissenschaft und Leben, für Lehrer und Lerner bearbeitet. 1. Aufl. (1821), 2. Aufl. Breslau, J. Max, 1837 (212 S.).

1822. 7. F. A. W. Diesterweg, Leitfaden für den ersten Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre, oder Vorübungen zur Geometrie. Für Schulen. Elberfeld, Büschler. 1822. (112 S. in 4°.)

1828. 8. A. Peters, Über das Studium der Mathematik auf Gymnasien. Ein Beitrag zur Beförderung einer gründlichen Einsicht in den Begriff, den Charakter, die Bedeutung und Lehrart dieser Wissenschaft. Dresden, Hilscher. 1828. (96 S., z. B. S. 77.)

1835. 9. J. F. Herbart, Umriß pädagogischer Vorlesungen. 1. Aufl. 1835, 2. Aufl. 1841. Abgedruckt in der Ausgabe der Schriften Herbarts von E. v. Sallwürk. 1. Band (1903), Langensalza, Bayer & Söhne (insbesondere S. 405f.).

1836. 10. W. Wittmer, Raumlehre auf dem Wege der Anschauung und Erfahrung für das gewöhnliche Leben. Karlsruhe, Groos. 1836. (102 S.)

1839. 11. A. Finger, Über den geometrischen Unterricht, besonders über dessen Vorbereitung, die sog. Formenlehre. Jahresber. d. höh. Bürgersch. Weinheim a. d. B., 1839, S. 3—16 (in klein 8°).

1839. 12. H. Gräfe, Geometrische Anschauungslehre. Als Anschauungs- und Denkübung und zur Vorbereitung auf den Unterricht in der Geometrie. 1. Aufl. 1839, 2. Aufl. Leipzig, Amelang, 1850 (306 S.).

1843. 13. K. Gruber, Die Raumformen- und Raumgrößenlehre in Verbindung mit dem Zeichnungs-Unterrichte. 1. Aufl. 1843, 2. Aufl. Mannheim, Bassermann, 1850 (187 S.).

1844. 14. Bernhard Becker, Über die Methode des geometrischen Unterrichts. 1844.

15. Wittstein, Über Materialien für den vorbereitenden mathematischen Unterricht.

1846. 16. Marbach, Geometrische Formenlehre. 1846.

1849. 17. [Österreich] Lehrplan und Instruktionen für den Unterricht an den Gymnasien in Österreich. 2. Aufl. Wien. 1900. (355 S.)

18. [Österreich] Instruktionen für den Unterricht an den Realschulen in Österreich im Anschlusse an einen Normallehrplan. Wien. 1899. (300 S.)

1850. 19. Hartmann, Aufgaben zur Übung im geometrischen Zeichnen. 1850.

1852. 20. Kosack, Beiträge zu einer systematischen Entwickelung der Geometrie aus der Anschauung. 1852. Jahresber. Gymnas. Nordhausen.

21. Moçnik, Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien. 1852. (18. Aufl. 1881, 21. Aufl. 1885.)

1853. 22. K. Fresenius, Die Raumlehre, eine Grammatik der Natur. Entwurf zu einer genetischen Schulmethode der Elementargeometrie. 1. Aufl. 1853, 2. Aufl. Frankfurt a. M., Winter, 1875 (102 S.).

23. Lichtenberg, Über die Vorstufe des mathematischen Unterrichts. Jahresber. Gymnas. Hersfeld. 1853. 4°. 69 S.

1859. 24. Flashar, Artikel „Anschauung“ in K. A. Schmids Enzyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens. Bd. 1. Gotha, Besser. 1859. (S. 164—174.)

25. Lorey, Geometrischer Anschauungsunterricht. 1859.

26. K. v. Raumer, (Erster) Artikel „Anschauungsunterricht“ in Schmids Enzyklopädie. Bd. 1. 1859. (S. 174—182.)

27. L. Völter, (Zweiter) Artikel „Anschauungsunterricht“ in Schmids Enzyklopädie. Bd. 1. 1859. (S. 182—202.)

1860. 28. Erler, Artikel „Ebene Geometrie“ in Schmids Enzyklopädie. Bd. 2. 1860. (S. 725—737, insbesondere S. 726.)

29. O. Fischer, Artikel „Geometrische Formenlehre und geometrisches Zeichnen“ in Schmids Enzyklopädie. Bd. 2. 1860. (S. 393—406.)

1866. 30. J. Falke, Propädeutik der Geometrie. Eine Bearbeitung der geometrischen Formenlehre nach einer neuen Methode, gegründet auf praktische Aufgaben aus der Geodäsie. Leipzig, Quandt & Händel. 1866. (142 S.)

1868. 31. F. C. Fresenius, Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. Wiesbaden, Kreidel. 1868. (193 S., besonders S. 191.)

1869. 32. E. Zizmann, Geometrische Formenlehre. Eine Anleitung zur Betrachtung geometrischer Körper und des Strahlenbündels als Vorbereitung zur gesamten Geometrie. Jena, Döbereiner. 1869. Erste Abteilung: Lehrstoff (88 S.); zweite Abteilung: Übungsstoff (104 S.).

1870. 33. H. Kießling, Das geometrische Zeichnen als Vorschule für den mathematischen Unterricht. [Hoffm. Zeitschr. 1 (1870), S. 47—59.]

1871. 34. J. Schram, Geometrische Formenlehre. 1871.

1872. 35. J. Streißler, Die geometrische Formenlehre. 1872.

1873. 36. Fritsche. Aufgaben und Fragen aus der geometrischen Formenlehre. 1873.

37. J. C. V. Hoffmann, Proben aus einer „Vorschule der Geometrie". H. Z. 4 (1873), S. 23—35.

38. K. Immel, Die Elemente der Raumlehre in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen. München, Lindauer. 1873. (87 S.)

39. Kaselitz, Geometrische Formenlehre. 1873.

40. Mohr, Darlegung der hauptsächlichsten Richtungen, welche in der geometrischen Formenlehre eingeschlagen worden sind. Jahresber. Rudolstadt. 1873. (Behandelt die Werke von Diesterweg, Marbach, Hartmann, Fischer, Fresenius, Zizmann, Falke.)

1874. 41. J. C. V. Hoffmann, Das Kapitel der Ähnlichkeit der Figuren im propädeutisch-geometrischen Unterrichte. H. Z. 5 (1874), S. 347—353 und S. 417—427.

42. J. C. V. Hoffmann, Vorschule der Geometrie. Ein methodischer Leitfaden beim Unterricht in der geometrischen Anschauungslehre Halle a. S., Nebert. 1. Lieferung 1874; 2. Lieferung 1881 (zus. 241 S.).

43. H. L. Börner, Anleitung zu einem vorbereitenden Lehrgang der Geometrie.

44. Féaux, Rechenbuch und geometrische Anschauungslehre.

1876. 45. H. L. Börner, Geometrische Propädeutik. Beil. z. Jahresber. d. Realsch. I. O. Ruhrort. 1876. 4°. S. 1—21.

46. D. Horn, geometrischer Anschauungskurs. 1876.

47. D. Horn, Geometrischer Anschauungskursus. Essen, Bädeker. 1876. (50 S. klein 8°.)

48. L. Schultzen, Der erste geometrische Unterricht. Beil. z. Jahresber. d. Realsch. I. O. Goslar. 1876. 4°. S. 3—16.

1877. 49. E. Kretschmer, Geometrische Anschauungslehre. Eine Vorschule und Ergänzung der reinen Geometrie mit 600 Fragen und Aufgaben. Posen, Jolowicz. 1877. (62 S.)

50. H. Pöhlitz, Der geometrische Unterricht in der Gymnasialquarta. Beil. z. Jahresber. d. Gymnas. Creuzburg. 1877. 12 S.

1878. 51. Erler, Ein propädeutischer Unterricht in der Geometrie ist notwendig. Vortrag in der mathem.-naturwiss. Abteilung der 33. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Gera (1878). H. Z. 10 (1879), S. 76 (Auszug).

1879. 52. H. L. Börner, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie.

53. A. Junghänel, Kursus zur Einführung in die Geometrie. Jahresber. der Realsch. I. O. Döbeln. 1879. 4°. S. 1—15.

54. Reishaus, Vorschule der Geometrie. 1879.

55. C. Roßmanith, Geometrische Formenlehre. Eine Anleitung zur Betrachtung geometrischer Körper als Vorbereitung zur Geometrie. Bielitz, Selbstverlag. 1879. (70 S.)

56. K. Schubert, Das Flächenmodell beim Unterrichte in der geometrischen Formenlehre. Wien. 1879. (47 S.)

57. Wittstein, Die Methode des mathematischen Unterrichts.

1880. 58. Haebe, Die Hilfsmittel des mathematischen Unterrichtes. Beil. Gymnas. Nakel. 1880. 4°. S. 1—36. (Darin S. 15 ff. ein „Kursus einer Propädeutik" sehr empfohlen.)

1881. 59. E. Hoffmann, Der Anfangsunterricht in der Geometrie (Probe eines Leitfadens). Beil. z. Jahresber. Realsch. I. O. Reichenbach i. Schl. 1881. 4°. S. 3—20.

60. Über Aufgaben und Methode oder Geometrische Propädeutik. Allgem. Schulzeitung 1881, Nr. 32—36 und 1882, Nr. 48—50.

1882. 61. H. Köstler, Vorschule der Geometrie.
1883. 62. O. Strack, Die Propädeutik der Geometrie. Jahresber. Gymnas. Karlsruhe. 1883. (28 S. in 4°.)
63. Weingärtner, Über den geometrischen Anschauungsunterricht in Quinta. Jahresber. Gymnas. Marburg. 1883. S. 1—12 (in 4°).
64. Weingärtner, Über den geometrischen Anschauungsunterricht in Quinta. Jahresber. Gymnas. Marburg. 1883. 4°. S. 1—12.
1885. 65. Breitsprecher, Der erste Unterricht in der Geometrie. Für die Quinten aller höheren Lehranstalten bearbeitet. 2 Hefte. Breslau. 1885.
66. Dieckmann, Übungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht in der Geometrie. 1. Teil: Vorübungen zur Euklidischen Geometrie. Breslau, Hirt. 1885. (43 S.) — 2. Teil: Vorübungen zur synthetischen Geometrie. Breslau, Hirt. 1885. (48 S.) — 2. Aufl. 1886—1887.
67. Erler, Der Würfel. a) Als Ausgangspunkt der Raumlehre in Quarta. — b) Als Wiederholung der einleitenden Kapitel der Stereometrie in Sekunda. Lehrproben und Lehrgänge. Halle a. S., Verlag des Waisenhauses. 3. Heft (1885), S. 1—7.
68. Meyer, Der geometrische Unterricht in Quinta. Jahresber. Progymnas. Schwatz. 1885. (VI + 8 S.) in 8°.
69. E. zur Nieden, Methodisch geordnete Aufgabensammlung.
1886. 70. Rattke, Übungsaufgaben für den propädeutischen Unterricht. Hannover. 1886 u. 1887.
71. F. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. 1. Aufl. Berlin, Grote, 1866; 2. Aufl. besorgt von Schotten. 1906. (269 S., insbesondere S. 175—186.)
72. Schiller, Handbuch der praktischen Pädagogik. Leipzig, 1886 (bes. S. 558—560).
73. H. Wittek, Behandlung der Konstruktionsaufgabe im geometrischen Anschauungsunterricht. (Ein Lehrversuch.) Beil. z. Jahresber. d. Real- u. Obergymnas. Horn (Niederösterr.). 1886. (20 S.)
1887. 74. H. Börner, Geometrischer Anschauungs- und Zeichen-Unterricht. Beil. z. Jahresber. d. Realgymnas. z. Elberfeld. 1887. (31 S. in 8°.)
75. E. Schulze, Vorschule für den geometrischen Unterricht. 2 Teile. Bielefeld, Velhagen & Klasing. 1887.
1888. 76. L. Heinze, Der Vorbereitungs-Unterricht in der Geometrie in Quinta. Jahresber. Kneiphöfsches Gymnas. Königsberg i. Pr. 1888. 4°. S. 1—20.
77. P. Horn, Zeichenhefte für den propädeutischen geometrischen Unterricht in Quinta. Breslau, Woywod. 1888.
78. Kempe, Zur Methode des vorbereitenden Zeichenunterrichtes in Quinta. Jahresber. Realsch. Remscheid. 1888.
79. Krimphoff, Vorschule der Geometrie (für Quarta). Jahresber. Gymnas. Coesfeld. 1888. 8°. S. 1—19.
80. Rumpen und Blind, Kurzer Leitfaden für den vorbereitenden geometrischen Unterricht in der Quinta höherer Lehranstalten. Köln, Ahn. 1888.
81. R. Schmidt, Das geometrische Zeichnen in der 1. und 2. Klasse des Gymnasiums. Jahresber. Gymnas. Schäßburg in Siebenbürgen. 1888. (15 S.)
82. P. Schönemann, Über die gegenseitige mechanische Verwandlung gleicher Dreiecke und Parallelogramme mittels unmittelbarer Konstruktionen. Beil. z. Jahresber. d. Archigymnas. zu Soest. 1888. (27 S. in 4°.)

1889. 83. G. Bohle, Der vorbereitende geometrische Unterricht in Quinta. Jahresber. Realsch. Crefeld. 1889. (28 S.)

84. H. Müller, Über den ersten planimetrischen Unterricht. Beil. z. Jahresber. d. Kaiserin-Augusta-Gymnas. Charlottenburg. I. Teil 1889. 4°. S. 1—30; II. Teil 1890. 4°. S. 1—27.

85. J. Pauly, Der erste Jahreskursus des planimetrischen Unterrichtes. Beil. z. Jahresber. d. Progymnas. Andernach. 1889. 4°. S. 3—17.

86. E. Schulze, Der propädeutische Unterricht in der Geometrie. Zeitschrift für das Gymnasialwesen. Jahrg. 43 (1889), S. 425—434.

87. K. Schwering, Aufgabe und Anschauung, besonders in der Stereometrie. Beil. z. Jahresber. Gymnas. Coesfeld. 1889. (9 S.)

88. H. Weyell, Der erste Unterricht in der Raumlehre. Beil. z. Jahresber. d. Realsch. Alsfeld (Hessen). 1889. 4°. S. 8—16.

1890. 89. H. Schotten, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Leipzig, Teubner. I. Bd. 1890 (370 S.); II. Bd. 1893 (410 S.). — Hierher gehörig I, S. 25—27.

1893. 90. H. Bensemann, Die konstruktive Methode im planimetrischen Unterricht. Beil. z. Jahresber. d. Ludwigs-Gymnas. in Cöthen. 1893. (25 S. in 4°.)

91. J. Diekmann, Bewegung und Umformung. Eine methodische Skizze. H. Z. 24 (1893), S. 81—96 und 25 (1894), S. 161—176.

92. W. Pietzker, Die Verteilung des Lehrstoffes für den mathematischen Gymnasialunterricht auf zwei Stufen. Vortrag beim „Förderungsverein“ am 4. April 1893. H. Z. 24 (1893), S. 225f.

93. A. Schäffer, Der geometrische Unterricht auf psychologischer Grundlage. Beil. z. Jahresber. d. Gymnas. zu Buchsweiler i. E. 1893 (28 S. in 4°.)

94. Streit, Rautengeometrie. Ein Beitrag zur geometrischen Propädeutik. H. Z. 24 (1893), S. 321—327.

1895. 95. M. Simon, Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik. Als Teil IX (und Sonderausgabe) von Dr. A. Baumeisters „Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre für höhere Schulen“. München, Beck, 1895 (128 S. in groß 8°); 2. Aufl. München 1908 (206 S. in groß 8°).

96. G. Holzmüller, Notwendigkeit eines propädeutisch-mathematischen Unterrichts in den Unterklassen höherer Lehranstalten vor dem wissenschaftlich-systematischen. H. Z. 26 (1895), S. 321—340.

97. F. Möhr, Anschauungsunterricht in der Geometrie. Beil. z. Jahresber. der Lehrerbildungsanstalt Meersburg. 1895. 8°.

1897. 98. Böttcher, Über bewegliche Schülermodelle zur Geometrie. Vortrag in der math.-naturw. Abteilung der 44. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Dresden (1897). H. Z. 28 (1897), S. 628f. (Auszug.)

99. A. Holzmann und R. Massinger, Geometrische Anschauungslehre. 3 Teile. Karlsruhe, Reiff. 1897. (32 + 30 + 32 S.)

100. R. Massinger, Über den neuen mathematischen Lehrplan der (bad.) Realschulen für die Unter- und Mittelklassen. Südwestdeutsche Schulblätter, 16. Jahrg. (1897), S. 5 u. 6.

1899. 101. B. Habenicht, Grundlinien zu einer natürlichen Behandlung der Geometrie im Unterrichte. Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften; Berlin, O. Salle; 5. Jahrg. (1899), S. 8f.

102. B. Habenicht, Erleichterungen im geometrischen Unterrichte, besonders des ersten Jahres. Unterrichtsbl. f. Math. u. Naturw., 5. Jahrg. (1899), S. 92—94 und S. 108—110.

1899. 103. M. Schuster, Die drei ersten Geometriestunden. Lehrproben und Lehrgänge; Halle a. S.; 58. Heft (1899), S. 100—105.

104. A. Seiffert, Die Herstellung der Raumgebilde als Ausgangspunkt, Entwickelungsprinzip und Endziel des geometrischen Unterrichts. Beil. z. Jahresber. d. Städt. Oberrealsch. Charlottenburg. 1899. (21 S. in 4°.)

1900. 105. J. G. Hamilton und F. Kettle, A first Geometry book. A simple course of exercices based on experiment and discovery. 7. Aufl. London, Arnold. 1900. (91 S.) — [Nachfolgend: A second Geometry book. 1906. (292 S.)]

106. M. Schuster, Bemerkungen über Inhalt und Methode des mathematischen Unterrichts. Lehrproben und Lehrgänge; Halle a. S.; 62. Heft (1900), S. 83—92.

1901. 107. E. Schulze, Die Reformbestrebungen in der Methodik des geometrischen Anfangsunterrichtes und die neuen preußischen Lehrpläne vom Jahre 1901. Zeitschr. f. d. Gymnasialwesen, 55. Jahrg. (1901), S. 612—636.

1902. 108. J. Norrenberg, Die Methodik des geometrischen Anfangsunterrichtes und die neuen preußischen Lehrpläne vom Jahre 1901. Zeitschr. f. d. Gymnasialwesen, 56. Jahrg. (1902), S. 230—233.

109. E. Zeissig, Die Raumphantasie im Geometrieunterrichte. In der Sammlung von Abhandlungen aus dem Gebiete der pädagogischen Psychologie und Physiologie, hrsg. von H. Schiller und Th. Ziehen, V. Bd., 6. Heft. Berlin, Reuther & Reinhard. 1902. (108 S.)

1903. 110. C. Musmacher, Leitfaden und Aufgabensammlung für den propädeutischen geometrischen Unterricht. Leipzig, Renger. 1903. (32 S. in klein 8°.)

111. J. Schacht, Die Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens im mathematischen Unterricht des Gymnasiums. Beil. z. Jahresber. d. Kgl. Marien-Gymnas. zu Posen. 1903. (12 S. in 4°.)

1904. 112. E. Arndt, Einführung in die Stereometrie als Pensum des ersten Vierteljahres der ersten Klasse. Beil. z. Jahresber. (Nr. 133) der 4. Realsch. Berlin. 1904. 19 S.

113. R. Fricke, Über Reorganisationsbestrebungen des mathematischen Elementarunterrichtes in England. Jahresber. d. deutschen Math.-Vereinigung, 13. Bd. (1904), S. 283—296.

114. G. Holzmüller, Vorbereitende Einleitung in die Raumlehre. Leipzig, Teubner. 1904. (X + 123 S.)

115. M. Simon, Über den einleitenden geometrischen Unterricht auf Quarta. (Aus einem an F. Klein gerichteten Briefe.) Jahresber. d. deutschen Math.-Vereinigung in Monatsheften, hrsg. von A. Gutzmer in Jena. 13. Bd. (1904); Leipzig, Teubner, S. 276—283.

116. E. Wienecke, Der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Leipzig, Teubner. 1904. (97 S.)

1905. 117. M. Nath, Zur Methodik des geometrischen Anfangs-Unterrichtes. H. Z. 36 (1905), S. 1—8.

1906. 118. J. Ducrue, Über geometrische Propädeutik. Vortrag auf der 15. Hauptversammlung des „Förderungsvereins“ zu Erlangen (1906). Unterrichtsblätter 12. Jahrg. (1906), S. 129—136.

119. C. A. Laisant, Initiation mathématique. Ouvrage étranger à tout programme. Dédié aux amis de l'enfance. Genève-Paris, Hachette et Cie. 1906. (161 S. in klein 8°.)

120. J. Schacht, Ein neuer Lehrgang für den Unterricht in der Raumlehre der höheren Lehranstalten. I. Teil: Die geradlinigen Figuren

und die von Ebenen begrenzten Körper. Beil. z. Jahresber. d. Kgl. Mariengymnas. in Posen. 1906. 12 S. in 4°.

1906. 121. G. Veronese, Prof. della R. Università di Padova, con la collaborazione di F. Gazzaniga, Prof. del R. Liceo di Padova: Elementi di Geometria intuitiva: 1) ad uso delle scuole tecniche; 2) per le scuole complementari; 3) ad uso dei Ginnasi inferiori. Padova, fratelli Drucker. 1906.

1907. 122. E. Brocke, Über die Benutzung symmetrischer Beziehungen im geometrischen Unterricht. Beil. z. Jahresber. d. Realsch. zu Münster im Elsaß. 1907. (30 S. in 4°.)

123. F. Höhm, Geometrische Anschauungslehre für Mädchenlyzeen. Wien, Tempsky. 1907. 2 Teile (53 + 42 S.)

124. Junge, Die unpraktische Schulmathematik. Pädagog. Archiv, 49. Jahrg. (1907), S. 206—221 (insbesondere S. 213ff.).

125. F. Klein, Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. Teil I: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig, Teubner. 1907. (236 S., insbesondere S. 30f. und S. 92.)

126. J. Perry, Practical Mathematics. Summary of six lectures delivered to working men at the museum of practical geology. London, Wyman and sons. 1907. (183 S.)

127. K. Seith, Ein Vorschlag zur geometrischen Propädeutik in dem Lehrplan der badischen Oberrealschulen. Südwestdeutsche Schulblätter, 24. Jahrg. (1907), S. 185—188.

128. M. Simon, Zu den Klein-Gutzmerschen Vorschlägen. Südwestdeutsche Schulblätter, 24. Jahrg. (1907), S. 41—44.

129. P. Treutlein. Zur Frage der geometrischen Anschauungslehre. Südwestdeutsche Schulblätter, 24. Jahrg. (1907), S. 71—73.

130. F. Walther, Die Neugestaltung des geometrischen Unterrichts. Unterrichtsblätter des sog. Förderungsvereins; Berlin, Salle; 13. Jahrg. (1907), S. 11—14.

1908. 131. H. Dreßler, Über bewegliche Modelle für den mathematischen und naturgeschichtlichen Unterricht. Unterrichtsblätter des sog. Förderungsvereins; Berlin, Salle; 14. Jahrg. (1908), S. 8—10.

132. F. Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Autographie. Leipzig, Teubner. 1908. (590 S. in 4°, insbesondere S. 88.) — Teil II: Geometrie. Ebenso 1909. (515 S. in 4°, insbesondere der Anhang: Vom Unterricht in der Geometrie nach seiner Entwickelung in den verschiedenen Ländern, S. 433—515.)

133. W. Lietzmann, Eine französische Rundfrage über den geometrischen Anfangsunterricht. Pädagog. Archiv, Jahrg. 1908, S. 523—530.

134. G. C. Young und W. H. Young, Der kleine Geometer. Deutsche Ausgabe besorgt von S. und F. Bernstein. Leipzig, Teubner. 1908. (239 S.)

1909. 135. K. Liewald, Die Anschaulichkeit im geometrischen Anfangsunterricht. Sonderabdruck aus dem 40. Jahrg. der Zeitschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht. Leipzig, Teubner. 1909. (33 S.)

136. Löffler, Der Anfangsunterricht in der Geometrie. Württemberg. Korrespondenz-Blatt, 16. Jahrg. (1909), S. 328—334.

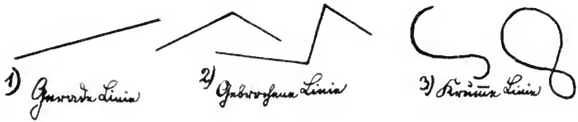
1910. 137. A. Höfler, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Leipzig, Teubner. 1910. (509 S. in groß 8°.) [Als Bd. I des Werkes: „Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen.“ In 10 Bänden. Hrsg. von A. Höfler und F. Poske.]

B. Geordnet nach der alphabetischen Folge der Verfassernamen.

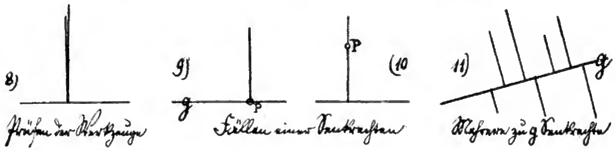
Zur Beachtung.

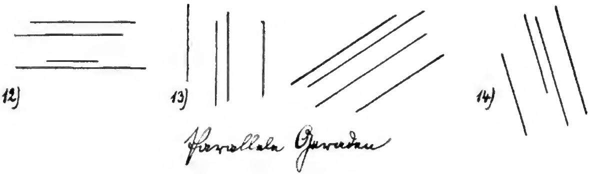
Die nachfolgenden Figurentafeln stellen in zusammengedrängter Form ein Schülerheft dar, wie es im Verlauf des zwei- bis dreijährigen Unterrichtes in geometrischer Anschauungslehre entstehen mag. Fast alle hier zum Abdruck gekommenen Figuren bilden einen notwendigen Bestandteil des im Buchtext angegebenen Lehrganges: ihre Ausführung durch die Schüler soll diese befähigen sowohl zum rein äußerlichen Gebrauch der geometrischen Werkzeuge als besonders zum selbsttätigen Erfassen und zur gründlichen Aneignung der den Unterrichtsinhalt ausmachenden Lehren. Der Vollständigkeit wegen durfte also auch der rechnende Teil der den Unterricht begleitenden Übungen nicht fehlen (z. B. Nr. 122, 147, 195, 200); dies aber machte die gewählte Druckwiedergabe notwendig. Nur einige wenige der in dieses Übungsheft mit aufgenommenen Figuren sind mehr nebensächlicher Art (die Nummern 51 bis 67): sie bieten die Anleitung zu leicht herstellbarer und die Jugend erfreuender Verzierung von Quadrat und Rechteck und sind in etwas größerer Zahl und Mannigfaltigkeit hier vorgeführt, um dem Lehrer, falls er überhaupt darauf eingehen will, die Auswahl und die bequeme Angabe zur Ausführung zu ermöglichen.

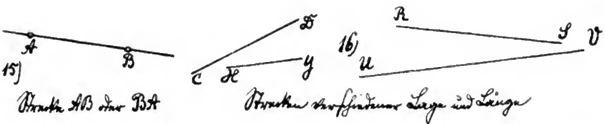
Möge auch dieser Figurenteil des Buches zur vollen Erläuterung des Unterrichtsganges beitragen und Segen stiften!

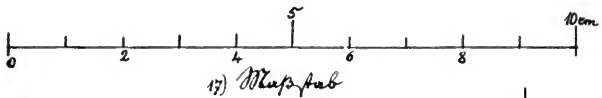

1) Gerade Linie
2) Gebrochene Linie
3) Krumme Linie

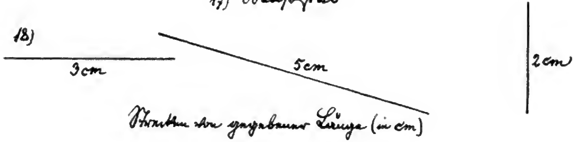

4) Waagrechte Gerade
5)
6) Lotrechte Gerade
7) Schiefe (schräge) Gerade

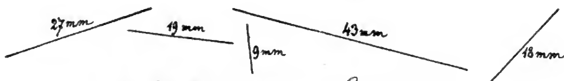

8) Prüfen der Werkzeuge
9) g p
P (10
Fällen einer Senkrechten
11) g
Mehrere zu g Senkrechte


12)
13)
14)
Parallele Gerade


A B
15)
Strecke AB oder BA
D C H y
16) R S V U
Strecken verschiedener Lage und Länge


5
10cm
0 2 4 6 8
17) Maßstab


18)
3cm
5cm
2cm
Strecken von gegebener Länge (in cm)



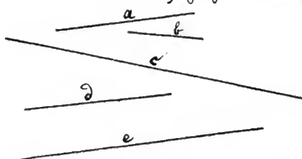
19) Strecken von gegebener Länge (in mm)



107 mm = 10,7 cm = 1,07 dm

20) Strecken von gegebener Länge

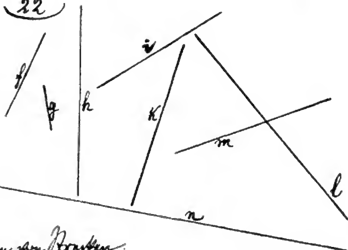
21) Schätzen und Messen von Strecken



	Geschätzt	Gemessen	Fehler
a	23 mm	25 mm	2 mm
b	12 mm	13 mm	1 "
c	60 mm	53 mm	7 "
d	28 mm	26 mm	2 "
e	42 mm	46 mm	4 "

22

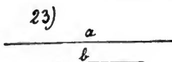
	Geschätzt	Gemessen	Fehler
f	18 mm	16 mm	2 mm
g	7 "	8 "	1 "
h	38 "	34 "	4 "
i	29 "	26 "	3 "
K	29 "	30 "	1 "
l	45 "	42 "	3 "
m	28 "	29 "	1 "
n	75 "	70 "	5 "



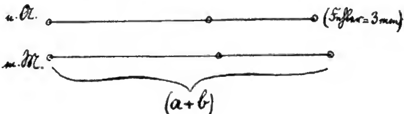
Schätzen und Messen von Strecken

Addieren u. Subtrahieren von Strecken

23)



Aufg. a + b = ?



24) u v w Aufg. $(u+v+w) = ?$

u. A.: Fehler = $3\frac{1}{2}$ mm

Genau: $(u+v+w)$

25) $(r-s)$

u. A.:

Aufg. $(r-s) = ?$

s r

u. M. { mehr: / oder: $(r-s)$

26) z y x Aufg. $(x+y-z) = ?$

u. A.: x y $(x+y-z)$ [Fehler = $7\frac{1}{2}$] z

u. M. {

mehr: $(x+y-z)$

oder: x y z $(x-z+y)$

oder: y z x $(y-z+x)$

}

Vervielfachen von Strecken

27)

a

Aufg. $2a = ?$

u. A.:

m. M.:

Fehler $= 3\frac{1}{2}$ mm

28)

b

Aufg. $3b = ?$

u. A.:

m. M.:

Fehler $= 2$ mm

29)

r s

Aufg. $(2r+3s) = ?$

u. A.: $2r$ $3s$

Fehler $= 1$ mm

m. M.: $(2r+3s)$

oder

u. A.: $3s$ $2r$

Fehler $= 6$ mm

m. M.: $(3s+2r)$

30)

x y

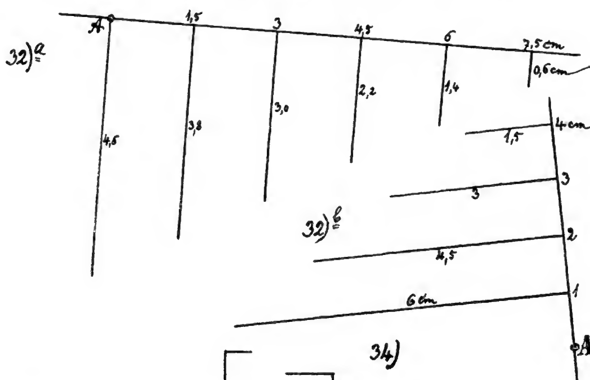
u. A.: x x x x x $(5x-3y)$ [f = 9 mm]

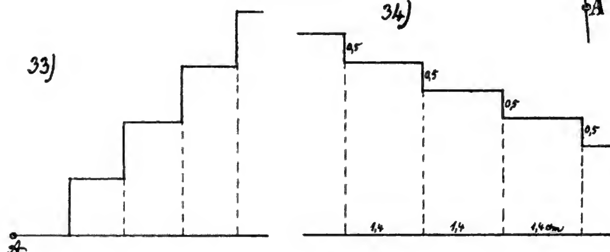
m. M. links: y y y $5x$ $(5x-3y)$

oder: $3y$ $5x$ $3y$ $(5x-3y)$

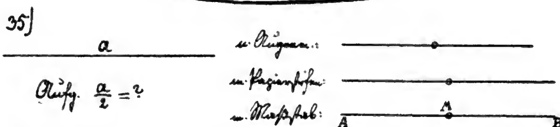
Aufg. $(5x-3y) = ?$

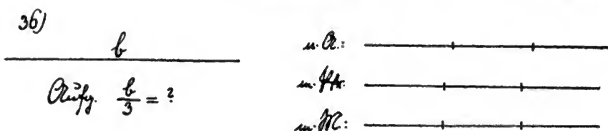


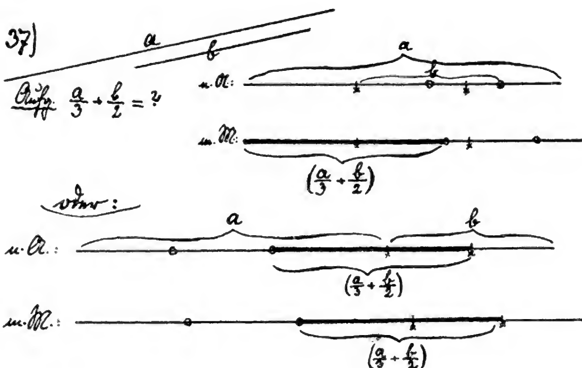




Teilen von Strecken.







Teilen in

38)

4 gleiche Teile



39)

8 gleiche Teile



40)

5 gleiche Teile



Bruchteile einer Strecke

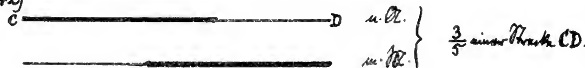
41)



Aufg.

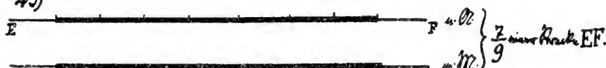
$\frac{2}{3}$ einer Strecke AB.

42)



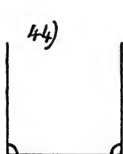
$\frac{3}{5}$ einer Strecke CD.

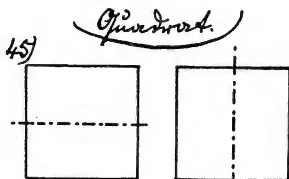
43)

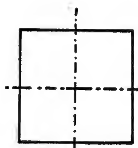


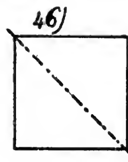
$\frac{7}{9}$ einer Strecke EF.

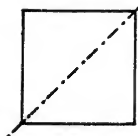
Quadrat.

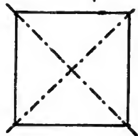


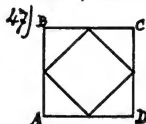


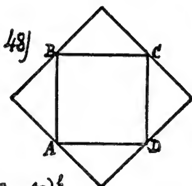


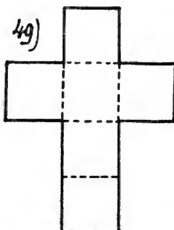


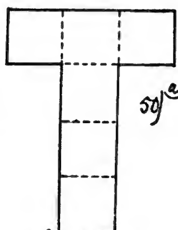


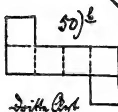








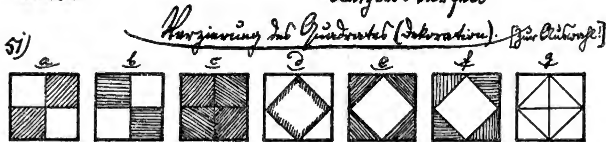


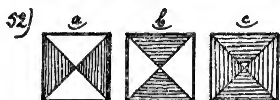


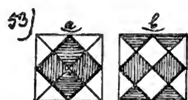
Erste Art — Zweite Art — Dritte Art

Netz des Würfels

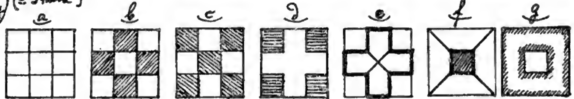
Verzierung des Quadrates (Dekoration). [Zur Auswahl!]

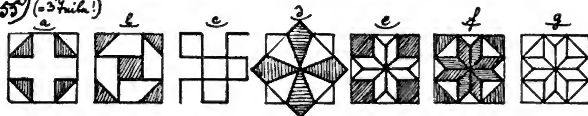
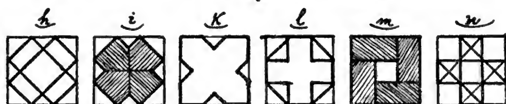
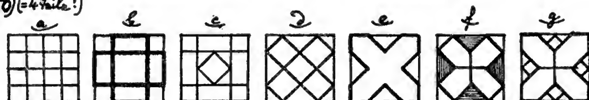
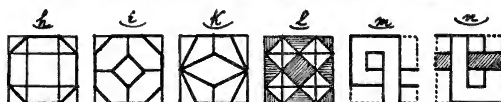
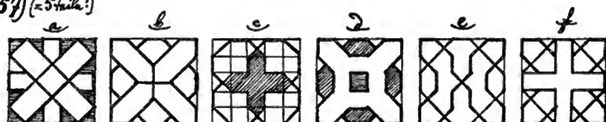
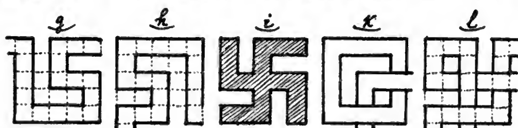
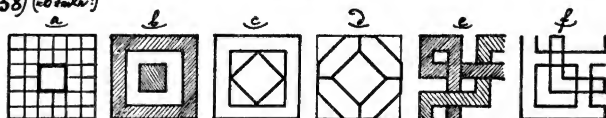
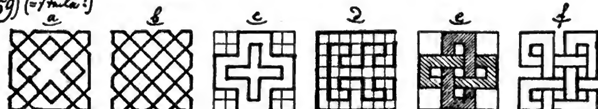




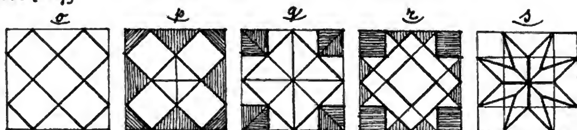


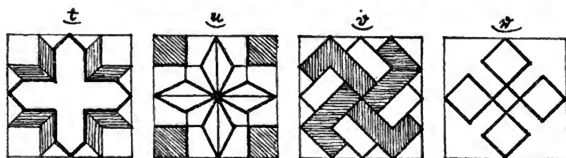
54) (= 3 Teile!)



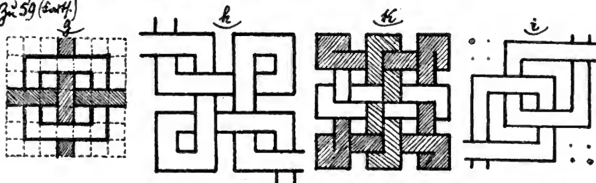

55) (=3 Teile!)
a b c d e f g

h i k l m n

56) (=4 Teile!)
a b c d e f g

h i k l m n

57) (=5 Teile!)
a b c d e f

g h i k l

58) (=6 Teile!)
a b c d e f

59) (=7 Teile!)
a b c d e f

Zu 56 (Forts.)



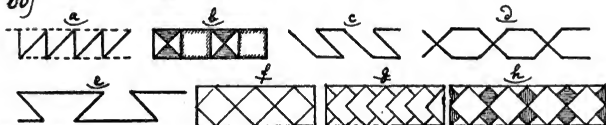


Zu 59 (Forts.)

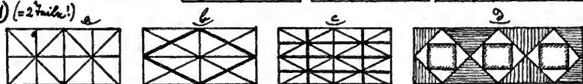


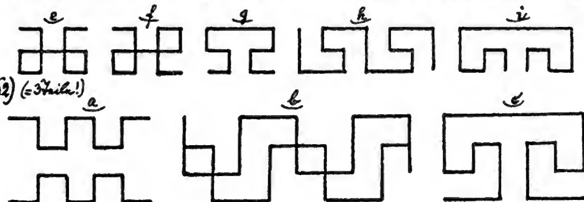
Verzierung des Heftrands (Dekoration). [zur Auswahl!]

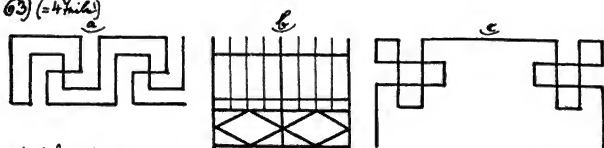
60)

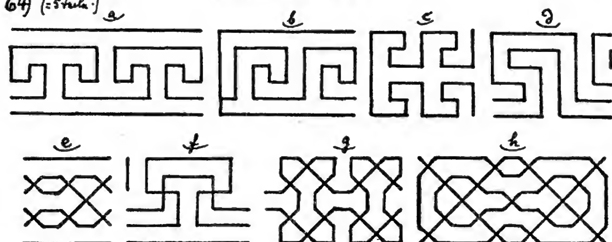


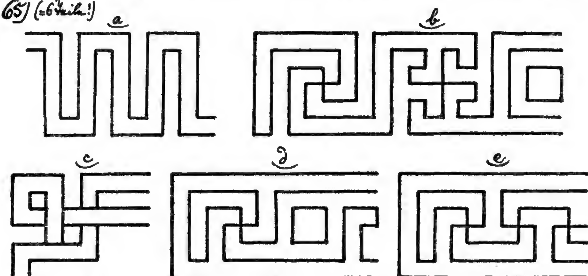
61) (= 2 Teile!)

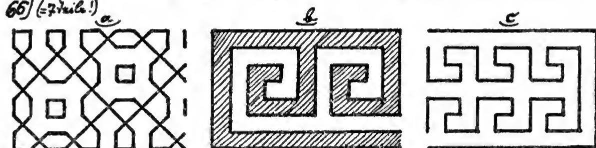


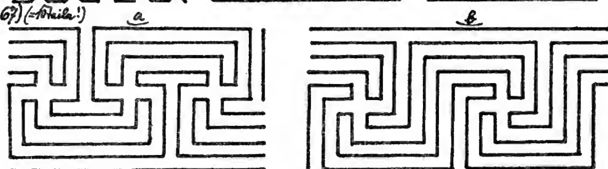



63) (=4 Teile!)
a
b
c

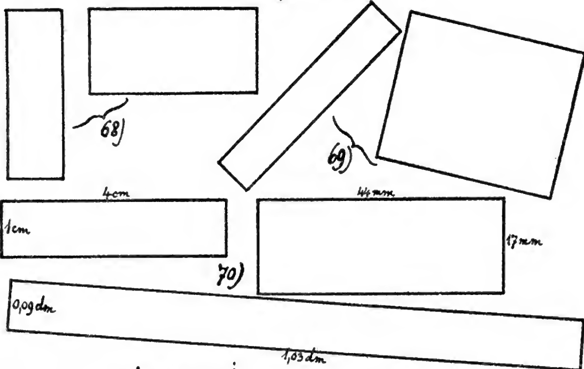

64) (=5 Teile!)
a
b
c
d
e
f
g
h

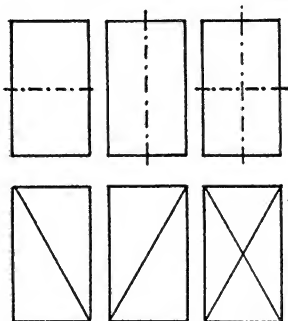

65) (=6 Teile!)
a
b
c
d
e


66) (=7 Teile!)
a
b
c

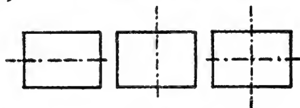

67) (=10 Teile!)
a
b

Rechteck.





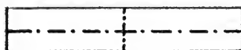
71) [Mittellinien des Rechtecks: Symmetrie.]

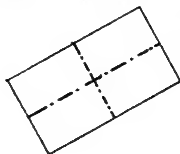


72) [Eckenlinien des Rechtecks.]

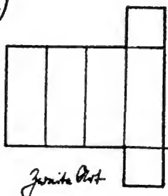


73) Zeichnen des R. auf Mittellinien





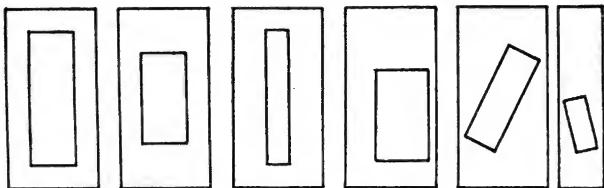
74)



Erste Art

Zweite Art

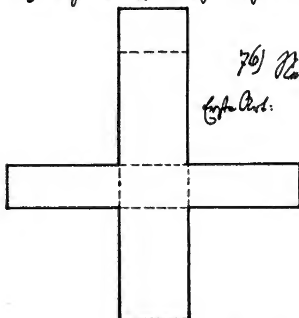
Netz der quadrat. Säule.



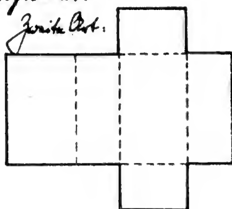
75) Rechtecke verschiedener Form [Zusammenfassung?]

76) Netz des Quaders

Erste Art:



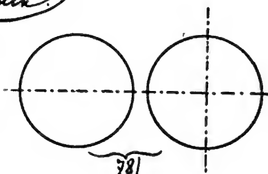
Zweite Art:



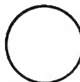
Kreislinie.



77)

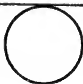


78)



79) Netz der senkrechten Kreiswalze

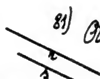




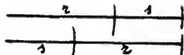
80) Übertragen einer Strecke s.



81) Addieren zweier Strecken

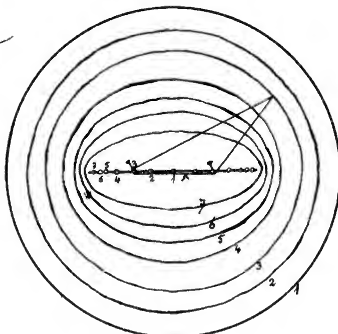


Aufg. (r+s)=?



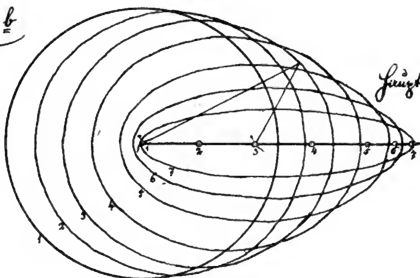
Ellipse:

81a



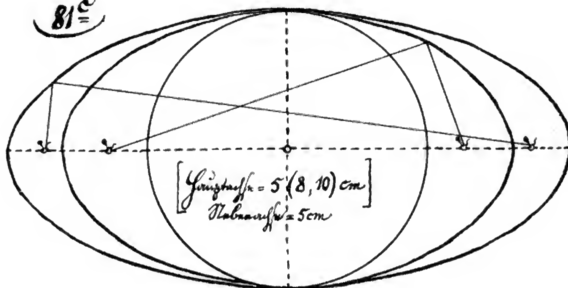
Gesamt-fadenlänge = =6 cm.

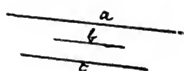
81b



Hauptachse = 48 mm.

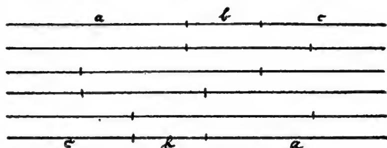
81c





82) Addieren von Strecken

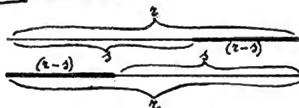
Aufg.
$a + b + c = ?$



83) Subtrahieren einer Strecke.



Aufg. $(r - s) = ?$



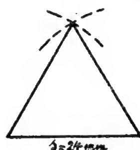
84) Multiplizieren einer Strecke.

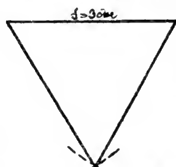
v

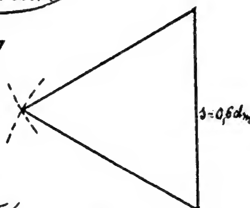
Aufg. $4v = ?$



85) Das gleichseitige Dreieck.



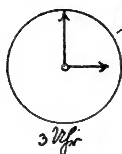


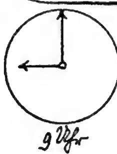


Winkel bei der Uhr.

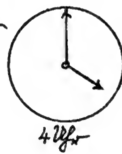
86)

87)

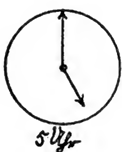

3 Uhr

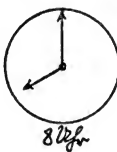

9 Uhr

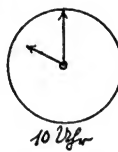

2 Uhr

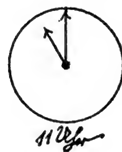

4 Uhr

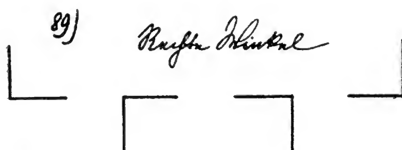
88)

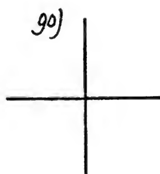

5 Uhr

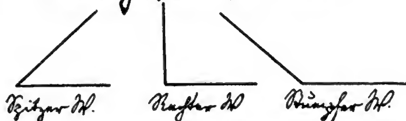

8 Uhr

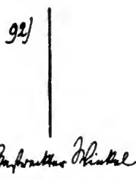

10 Uhr

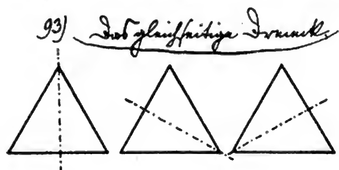

11 Uhr

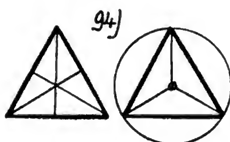




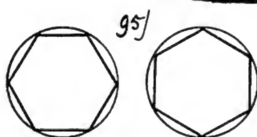


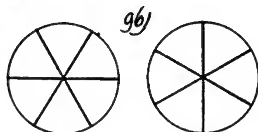


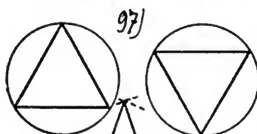


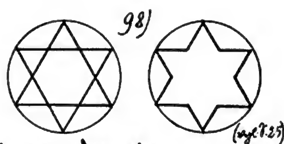


Das regelmässige Sechseck.

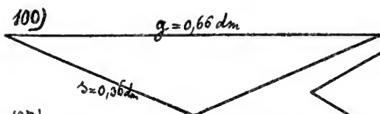


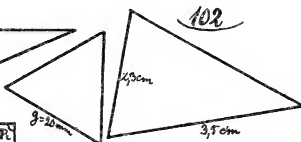


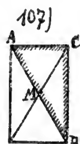


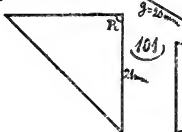


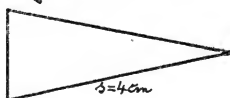


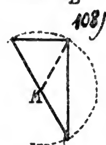


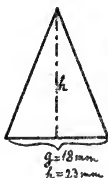


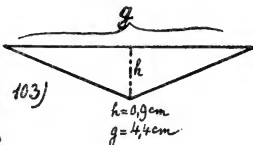


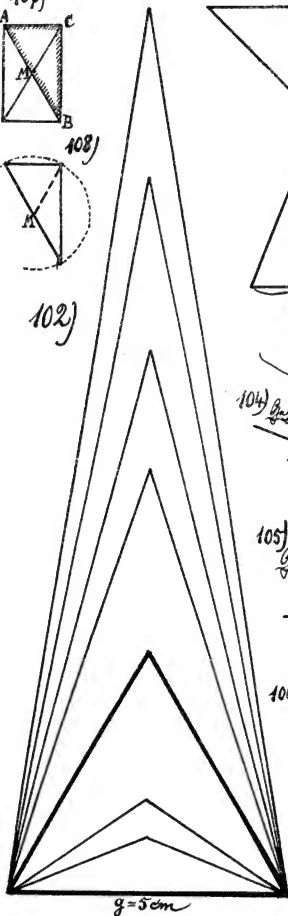




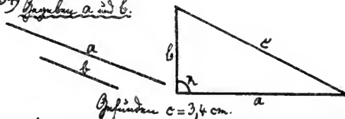




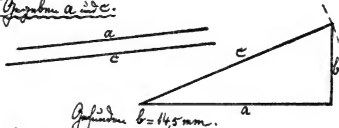




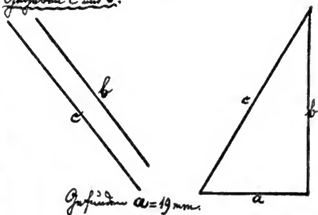
Das rechtwinklige Dreieck.



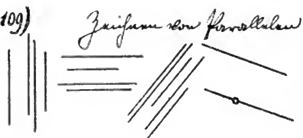
105) Gegeben a und c.



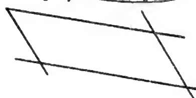
106) Gegeben c und b.



109) Zeichnen von Parallelen



110) Parallelogramme



111) Zeichnen von Parallelogrammen.

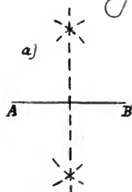


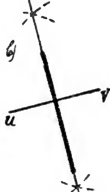


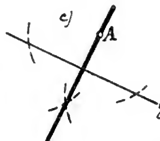


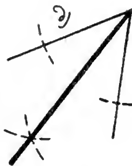


112) Zirkel-Lösung von 4 Grundaufgaben



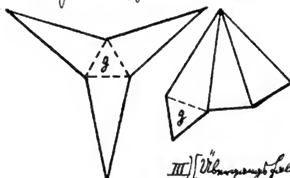




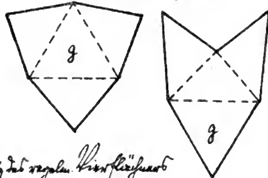


113) Netz der senkrechten Pyramide auf regulär. 3seitiger Grundfläche:

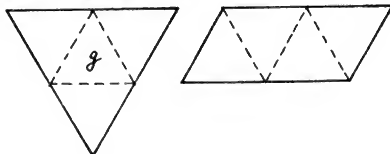
I) gestreckte Pyramide.



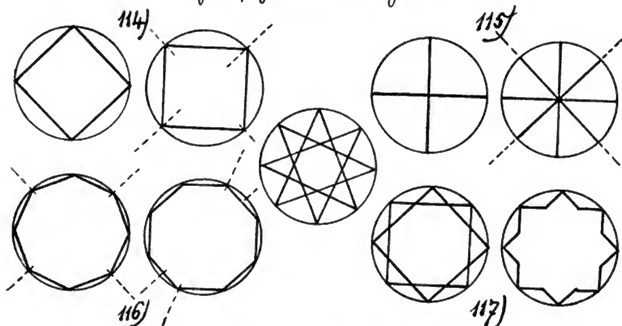
II) gedrückte Pyramide.



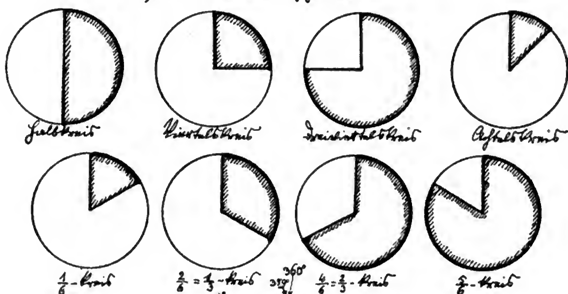
III) [Übergangsfall] Netz des regulär. Vierflächners



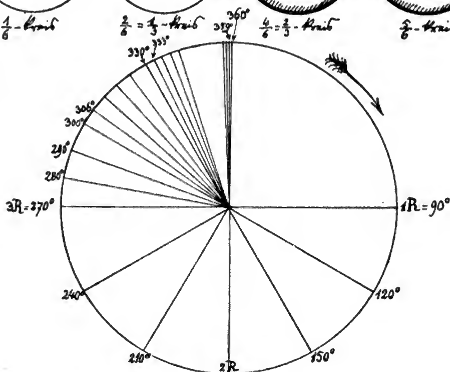
Das regelmäßige Viereck und Achteck.



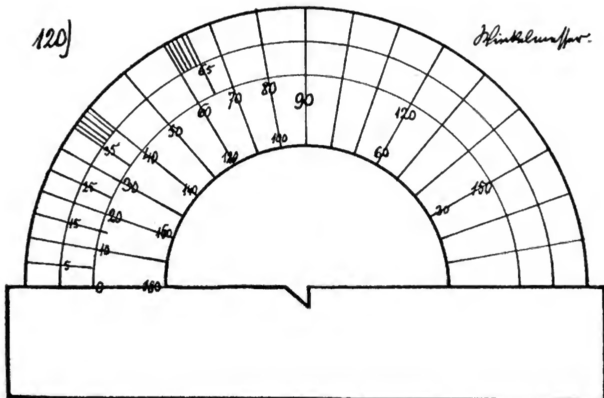
118) Kreisausschnitte.



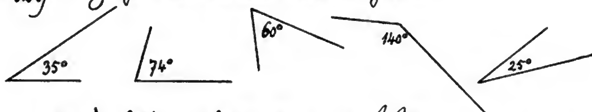
119)



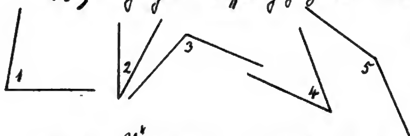
120) Winkelmesser.



121) Zeichnen von Winkeln bestimmter Größe.



122) Schätzen u. Messen gezeichneter Winkel.



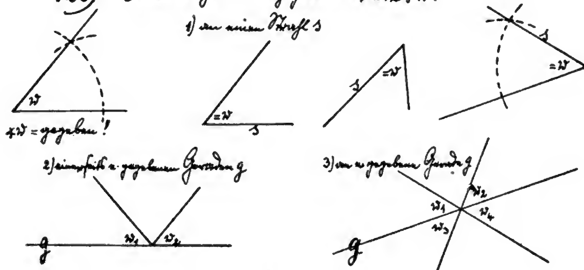
Nr.	Geschätzt	Gemessen	Fehler
1)	75°	80°	5°
2)	20°	29°	9°
3)	100°	109°	9°
4)	42°	45°	3°
5)	160°	150°	10°

123) Übertragen eines gegebenen Winkels w:

1) an einen Strahl s

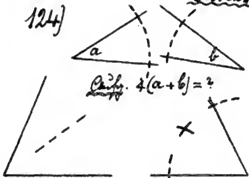
2) einerseits e. gegebenen Geraden g

3) an e. gegebene Gerade g



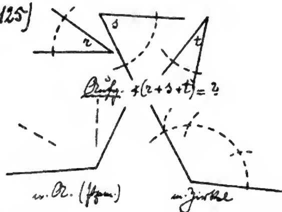
Addieren von Winkeln.

124)



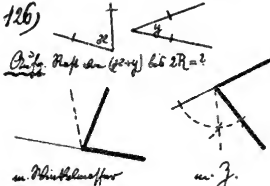
u. R. od. mit Papierstreifen — mit Zirkel

125)



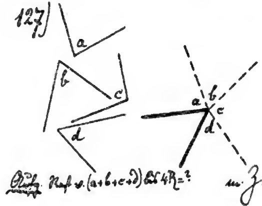
u. R. (Papier) — u. Zirkel

126)



u. Winkelmesser — u. Z.

127)



Aufg. Rest v. (a+b+c+d) bis 4R = ? — u. Z.

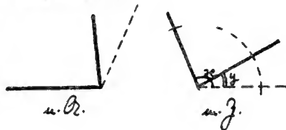
Subtrahieren eines Winkels.

x

y

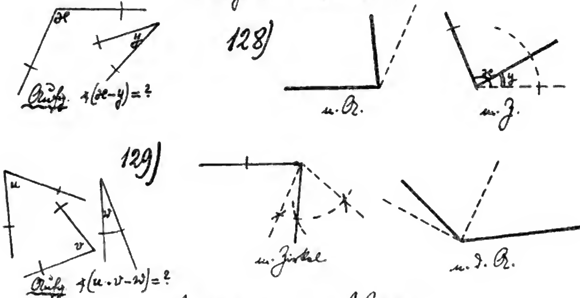
Aufg. ∢(x−y) = ?

128)



u. R. — u. Z.

129)

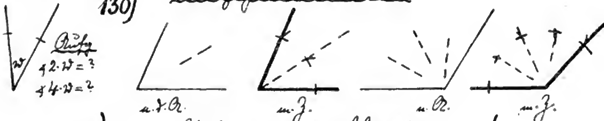


Multiplizieren eines Winkels.

130)

w

Aufg. ∢2·w = ? ∢4·w = ?

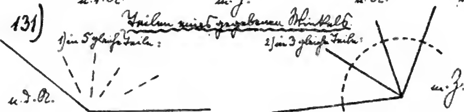


u. d. R. — u. Z. — u. R. — u. Z.

Teilen eines gegebenen Winkels.

131)

1) in 5 gleiche Teile: — 2) in 3 gleiche Teile:



u. d. R. — u. Z.

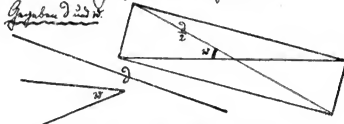
132) Zeichnen der Raute.

Gegeben s und w

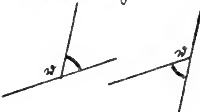


133) Zeichnen des Rechtecks

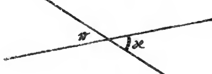
Gegeben d und w.



134) Nebenwinkel zu ∢ w

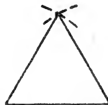


135) Scheitelwinkel zu ∢ w.



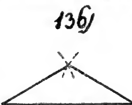
Das beliebige Dreieck.

136)



Gleichseitiges Dr.



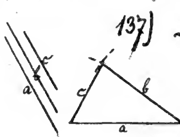


Gleichschenkliges Dr.

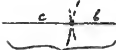


Ungleichseitiges Dr.

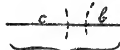
137) Beziehungen zwischen den Seiten eines Dreiecks.









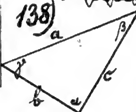


Griech. Buchstaben:

α = Alpha
β = Beta
γ = Gamma

Beziehungen zwischen den Seiten u. Winkeln des Dreiecks.

138)

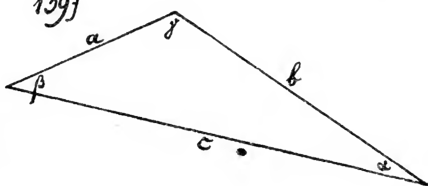


	Geschätzt	Gemessen	Fehler
a	28 mm	26 mm	2 mm
b	15 "	16 "	1 "
c	22 "	21 "	1 "

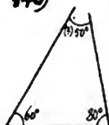
	Geschätzt	Gemessen	Fehler
α	85°	88°	3°
β	32°	37°	5°
γ	45°	54°	9°

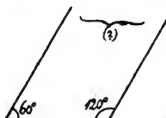
	Geschätzt	Gemessen	Fehler
a	30 mm	32 mm	2 mm
b	46 "	53 "	7 "
c	60 "	75 "	15 "
α	23°	20°	3°
β	40°	37°	3°
γ	120°	122°	2°

139)

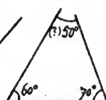


140) Versuche, Dreiecke zu zeichnen mit 3 gegebenen Winkeln



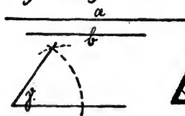


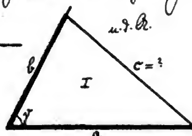


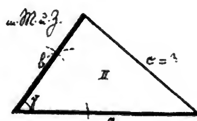


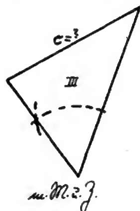
Zeichnen des Dreiecks aus zwei Seiten und ihrem Zwischenwinkel

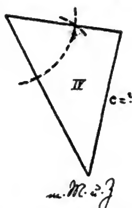
A) 141)

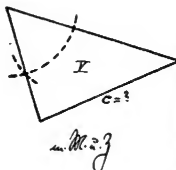










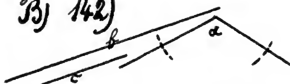


m. M. u. Z. | m. M. u. Z. | m. M. u. Z.

Das Messen der Seite c ergibt in

Fig.	mm
I	29½
II	26½
III	27
IV	26
V	26¾

B) 142)



zu Fig. I

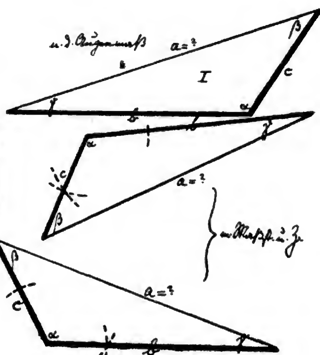
	Geschätzt	Gemessen
α	60 mm	58½
β	45°	37°
γ	24°	18°

zu Fig. II

	Geschätzt	Gemessen
α	56 mm	52½ mm
β	47°	42°
γ	27°	19½°

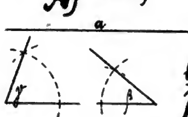
zu Fig. III

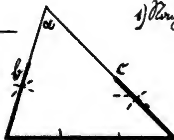
	Geschätzt	Gemessen
α	56 mm	53 mm
β	46°	41½°
γ	22°	19°



Zeichnen des Dreiecks
aus einer Seite und zwei Anwinkeln

A) 143)

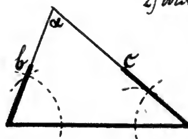




1) Nach dem Augenmaß.

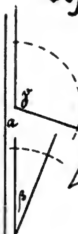
	Geschätzt	Gemessen	Fehler
α	70°	61°	10°
b	26 mm	24,5 mm	1,5 mm
c	34 mm	33 mm	1 mm

2) Mit Zirkel

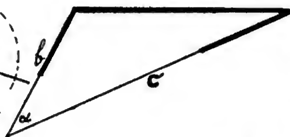


	Geschätzt	Gemessen	Fehler
α	75°	69°	6°
b	25 mm	22 mm	3 mm
c	36 mm	32 mm	4 mm

B) 144)

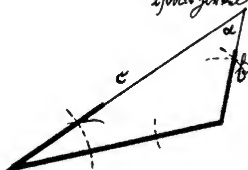


1) Nach dem Augenmaß



	Geschätzt	Gemessen	Fehler
α	45°	38°	7°
b	25 mm	26 mm	1 mm
c	58 mm	55 mm	3 mm

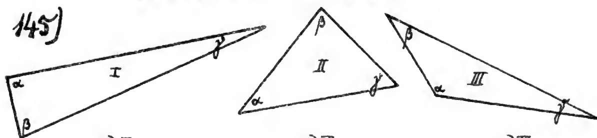
2) Mit Zirkel.



	Geschätzt	Gemessen	Fehler
α	40°	44°	4°
b	23 mm	21 mm	2 mm
c	55 mm	51 mm	4 mm

Die Winkel des Dreiecks.

145)



zu I

∢	Geschätzt	Gemessen
α	85°	89°
β	76°	79°
γ	22°	13°

Summe = 181°

zu II

∢	Geschätzt	Gemessen
α	45°	41°
β	82°	84°
γ	60°	55°

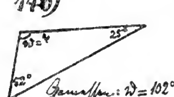
Summe = 180°

zu III

∢	Geschätzt	Gemessen
α	125°	129°
β	30°	32°
γ	20°	18°

Summe = 179°

146)

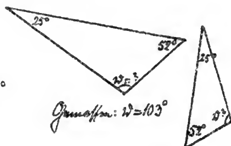


Gemessen: w = 102°

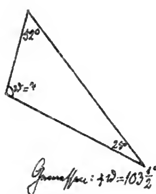
Berechnung:

52° + 25° = 77°

180° − 77° = 103° = soll ∢ w sein!



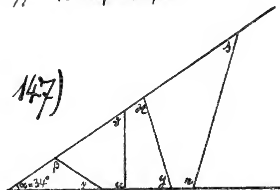
Gemessen: w = 103°



Gemessen: ∢ w = 102°

Gemessen: ∢ w = 103½°

147)



Die Messung ergibt:

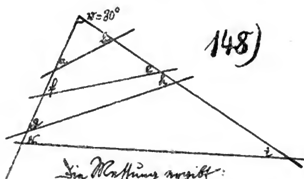
∢ β = 111°, ∢ γ = 34°, Summe = 145°

∢ u = 90°, ∢ v = 56°, = 146°

∢ x = 73°, ∢ y = 74°, = 147°

∢ w = 106½°, ∢ z = 39°, = 145½°

148)



Die Messung ergibt:

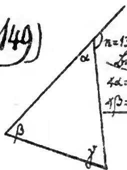
∢ a = 38°, ∢ b = 61°, Summe = 99°

∢ e = 45°, ∢ f = 54½°, = 99½°

∢ g = 47°, ∢ h = 52½°, = 99½°

∢ i = 30½°, ∢ k = 70½°, = 101°

149)



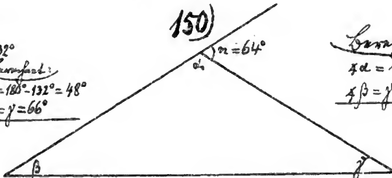
n = 132°

Berechnet:

∢ α = 180° − 132° = 48°

∢ β = γ = 66°

150)

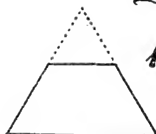


Berechnet:

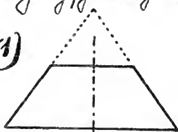
∢ α = 116°

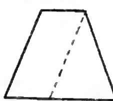
∢ β = γ = 32°

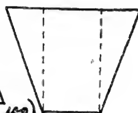
Das gleichschenklige Trapez.



151)





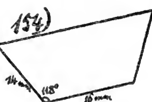


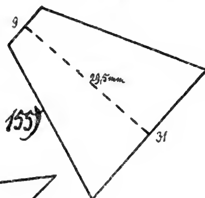
152)

153)



154)

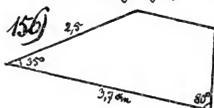


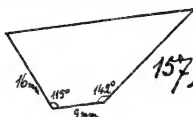


155)

Das ungleichschenklige Trapez.

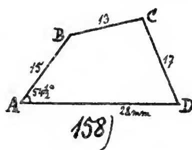
156)



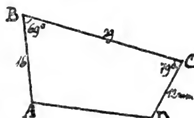


157)

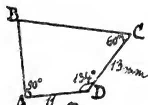
Das Viereck.



158)

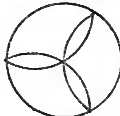


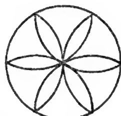
159)



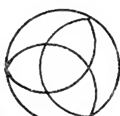
160)

Nachtrag zu Nr. 98

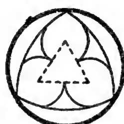






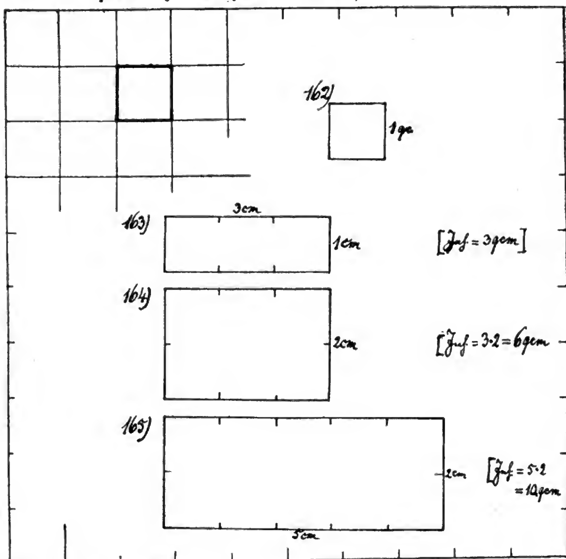




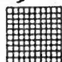


Flächenmaß. Inhalt des Rechtecks.

161) 1 Quadratdezimeter (1 qdm = 100 qcm)

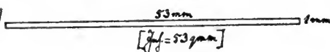


166)

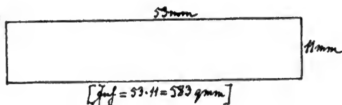


1 qcm = 100 qmm

167)



168)

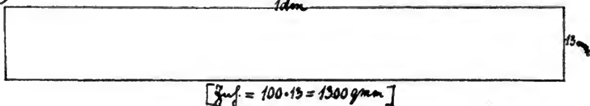


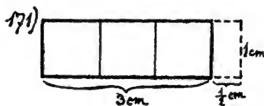
169)

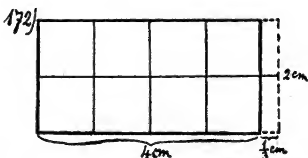


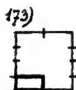
[Inh = 80·7 = 560 qmm]

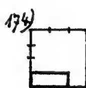
170)

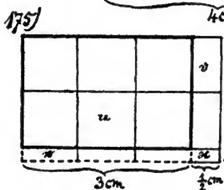






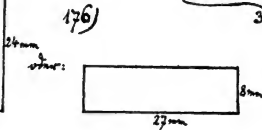


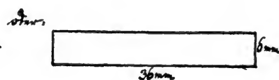




Inhalt =
$= 3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{4}$ qcm
$= \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{4}$ qcm
$= \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}$ qcm

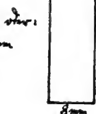




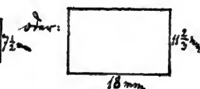


177)

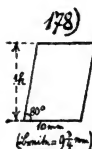


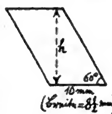


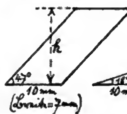


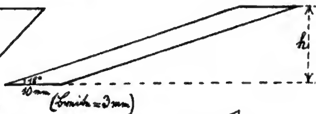


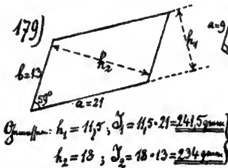
Inhalt des Parallelogramms.



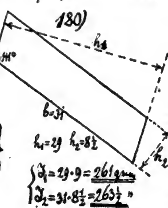




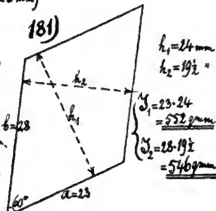




Gemessen: $h_1 = 11{,}5$; $J_1 = 11{,}5 \cdot 21 = 241{,}5$ qmm
$h_2 = 18$; $J_2 = 18 \cdot 13 = 234$ qmm

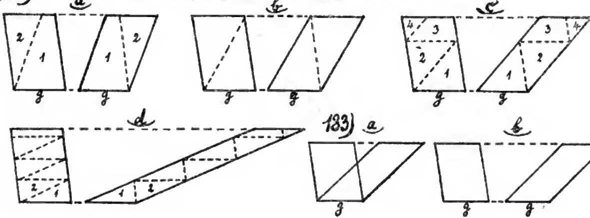


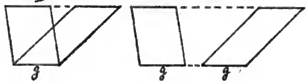
$h_1 = 29$ $h_2 = 8\frac{1}{2}$
$J_1 = 29 \cdot 9 = 261$ qmm
$J_2 = 31 \cdot 8\frac{1}{2} = 263\frac{1}{2}$ "



$h_1 = 24$ mm
$h_2 = 19\frac{1}{2}$ "
$J_1 = 23 \cdot 24 = 552$ qmm
$J_2 = 28 \cdot 19\frac{1}{2} = 546$ qmm

Inhaltsgleichheit der Parallelogramme.





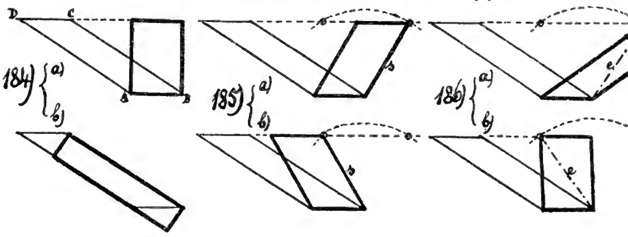
Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes:

1) in ein Rechteck:

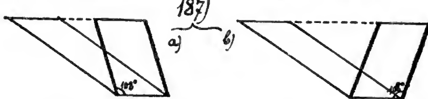
in eines mit derselben Grundseite und dazu

2) mit gegebener neuer Seite:

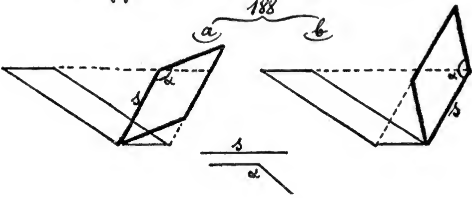
3) mit gegebener neuer Höhenlinie:



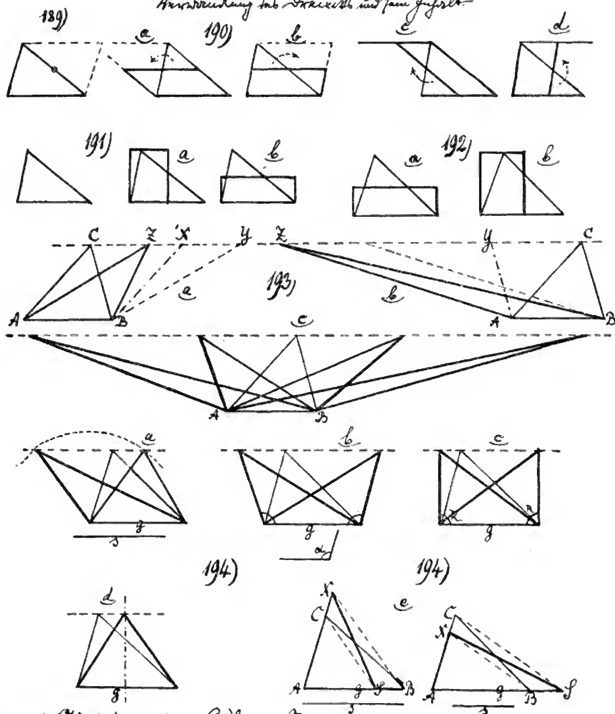
4) mit gegebenem neuem Winkel an der Grundseite:



5) mit gegebener neuer Seite s und gegebenem neuem Winkel α:



Verwandlung des Dreiecks und sein Inhalt.



195) Auflösungen zu den Aufgaben Seite

a) Selbe Grundseite = 14,18 m, also Inhalt = 14,18 · 12,59 = ?

α) 14,18 · 12,59
1418
2836
7090
12762
J = 1785262 qcm

β) 14,18 · 12,59
14,180 · 1,259
14180
2836
709
127
J = 17852 qdm

γ) 14,18 · 14,59
1418 · 1259
142
28
7
1
J = 178 qm

b) $J = \frac{352}{2} \cdot 789$ qcm

α) $176 \cdot 789$
1232
1408
1584
$J = 138864$ qcm

β) $1,76 \cdot 7,89$
1232
141
15
1388 qdm

γ) $1,76 \cdot 7,89$
12
1
$J = 13$ qm

c) α) $3,78 \cdot 1,96$
378
340
22
740
·2
$J = 1480$ qcm

β) $378 \cdot 196$
378
3402
2268
74088
·2
148176 qmm

γ) $3,78 \cdot 1,96$
4
3
7
·2
$J = 14$ qdm

d) Es muss $\frac{19,6}{2} \cdot g = 267,8$ oder $9,8 \cdot g = 267,8$ sein, also $g = 267,8 : 9,8$ oder $g = 2678 : 98 = 27,3$ cm.
718
320

e) Jede Seite ist $= \frac{23,4}{3} = 7,8$ dm.
Also ist: $h^2 = 7,8^2 - 3,9^2 = 60,84 - 15,21 = 45,63$
$h = \sqrt{45,63} = 6,75$ dm
963 : 127
7405 : 134
Somit ist $J = 3,9 \cdot 6,75$ qdm $= 39 \cdot 67,5$ qcm
$= 390 \cdot 6,75$
2340
273
20
2633 qcm = Inhalt des Dreiecks.

f) Aus $u = 579$ cm folgt $s = 96,5$ cm.
Hieraus die Höhe h eines Teildreiecks = 83,6 cm.
Inhalt eines Teildreiecks $= \frac{96,5 \cdot 83,6}{2} = 96,5 \cdot 41,8$ qcm $= 4034$ qcm.
Somit Inhalt des Sechsecks $= 40,34 \cdot 6 = 242,04$ qdm.

196)



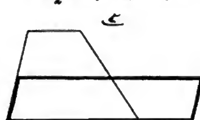


197) Der Inhalt des Trapezes ist =
$= \left(\frac{7,8 + 5,6}{2}\right) \cdot 4,9$ qm
$= \frac{13,4}{2} \cdot 4,9 = 6,7 \cdot 4,9$ qm $= 32,83$ qm.

198) Verwandlung des Trapezes







199)



200) α) Flächeninhalt der Wiese $= \frac{124,3 + 109,5}{2} \cdot 97,8$ qm $= \frac{233,8}{2} \cdot 97,8$ qm $=$

$= 116,9 \cdot 97,8$

10521
8183
9352

11432,82 qm = 114,33 a.

Heuertrag $= 114,33 \cdot \frac{3}{4}$ Ztr $= \frac{342,99}{4}$ Ztr $= 85,75$ Ztr.

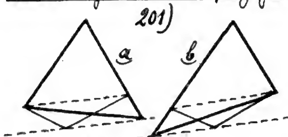
β) Inhalt der Dachfläche $= \frac{53,8 + 36,4}{2} \cdot 24$ qm $= 45,1 \cdot 24$ qm $= 1082,4$ qm.

Inhalt einer Ziegelfläche $= 27 \cdot 15$ qcm $= 405$ qcm; hiervon offene Fläche $= 405 \cdot \frac{1}{3}$ qcm $= 135$ qcm $= 0,0135$ qm

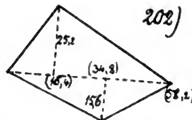
Anzahl der Ziegel $= 1082,4 : 0,0135$
$= 10824000 : 135 = 721600 : 9 = 80178$ Ziegel.

Verwandlung des Vierecks u. sein Inhalt.

201)



202)

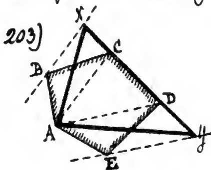


Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot [58,2 \cdot 25,2 + 58,2 \cdot 15,6]$ qm
$= \frac{1}{2} \cdot 58,2 \cdot 40,8$ qm $= 29,1 \cdot 40,8$ qm
$= 1187,28$ qm

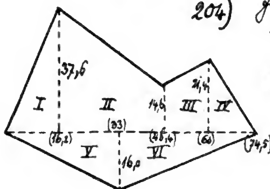
Preis $= 1187,28 \cdot 4,33$ M
474912
35618
3562
$= 5140,92$ M.

Verwandlung des Vielecks u. sein Inhalt.

203)



204)



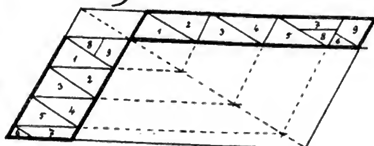
Inh. von I $= \frac{1}{2} \cdot 16,2 \cdot 37,6 = 8,1 \cdot 37,6 = 304,56$ qm
" " II $= \frac{1}{2} \cdot 52,2 \cdot 30,2 = 26,1 \cdot 30,2 = 788,22$ "
" " III $= \frac{1}{2} \cdot 36,0 \cdot 13,6 = 18,0 \cdot 13,6 = 244,8$ "
" " IV $= \frac{1}{2} \cdot 14,5 \cdot 21,4 = 14,5 \cdot 10,7 = 155,15$ "
" " V $= \frac{1}{2} \cdot 33,0 \cdot 16,0 =$
" " VI $= \frac{1}{2} \cdot 41,5 \cdot 16,0 =$ } $\frac{1}{2} \cdot 74,5 \cdot 16,0 = 596,00$ "

Gesamtinhalt $= 2088,73$ qm.

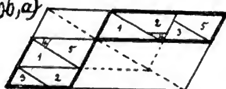
205) Die Ergänzungsparallelogramme.



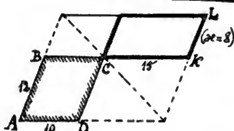
206, b)

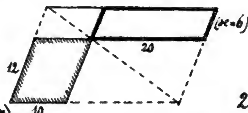


206, a)

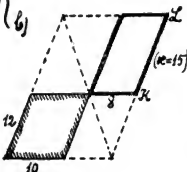


Umwandlung der Parallelogramme (mittels der Ergänzungsparallelogramme).

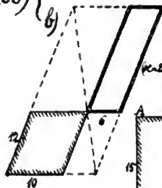




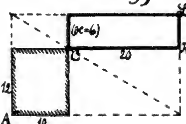
207) a) b)

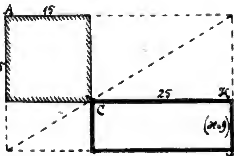


208) a) b)



209)





210)

Rechnungsaufgaben (zur Rechteckumwandlung).

211)

a_1) $21 \cdot x = 24 \cdot 35$; also: $x = \frac{24 \cdot 35}{21} = 40$ mm

a_2) $16{,}5 \cdot x = 24 \cdot 35$; " $x = \frac{24 \cdot 35}{16{,}5} = 50{,}9$ mm

a_3) $17{,}44 x = 24 \cdot 35$; " $x = \frac{24 \cdot 35}{17{,}44} = 840 : 17{,}44 =$
$= 84000 : 1744 = 48{,}17$ mm
14240
288
114

212)

b_1) $28 \cdot x = 42 \cdot 42$; $x = \frac{42 \cdot 42}{28} = 63$ cm

b_2) $24{,}5 \cdot x = 42 \cdot 42$; $x = \frac{42 \cdot 42}{24{,}5} = 72$ cm

b_3) $23 \cdot x = 42 \cdot 42$; $x = \frac{42 \cdot 42}{23} = 1764 : 23 = 76{,}7$ cm
154
160

b_4) $25{,}69 \cdot x = 42 \cdot 42$; $x = \frac{42 \cdot 42}{25{,}69} = \frac{6 \cdot 4200}{367} =$
$= 25200 : 367 = 68{,}7$ cm
3180

213) (1. Teil S.)

Auflg. c_1) $x^2 = 18 \cdot 32 = 576$, also: $x = \sqrt{5'76} = 24$
$\cdot 176 : 44$
0

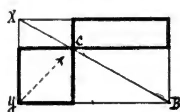
c_2) $x^2 = 55 \cdot 2695 = \begin{array}{r} 13475 \\ 13475 \\ \hline 148225 \end{array}$, also: $x = \sqrt{14'82'25} = 385$
$582 : 68$
$3825 : 765$
0

c_3) $x^2 = 87{,}5 \cdot 3{,}5 = \begin{array}{r} 2625 \\ 4375 \\ \hline 306{,}25 \end{array}$, also: $x = \sqrt{3'06{,}25} = 17{,}5$
$206 : 27$
$1725 : 345$
0

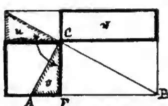
c_4) $x^2 = 97{,}2 \cdot 21{,}8 = \begin{array}{r} 1944 \\ 972 \\ 7776 \\ \hline 2118{,}96 \end{array}$, also: $x = \sqrt{21'18{,}96} = 46{,}03 \ldots$
$518 : 86$
$296 : 92$
$29600 : 920$
$\ldots\ldots$

Inhaltsgleichheit von Quadrat und Rechteck

214)

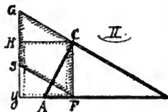


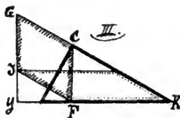
215)

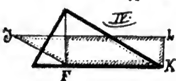


216)



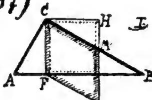


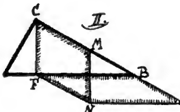


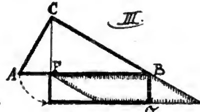




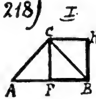
217)

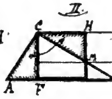


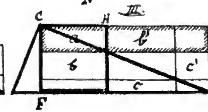


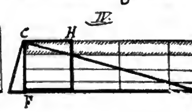


218)

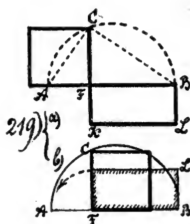








219) a) b)



220)

27 3

Inh. $= 27 \cdot 3 = 81$ qmm

Aufl.: $x^2 = 81$

$x = \sqrt{81} = 9$ mm.

221)

31,2 7,3

Inh. $= 31{,}2 \cdot 7{,}3$

2184
936
227,76

Aufl.: $x = \sqrt{227{,}76} = 15{,}09$ mm

127 : 25
276 : 30
27600 : 300

222)

23,76 11,29

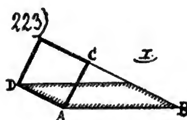
Inh. $= 23{,}76 \cdot 11{,}29$

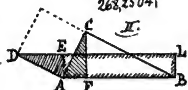
26136
4752
21384
268,2504

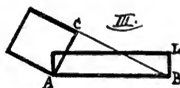
Aufl.: $x = \sqrt{268{,}2504} = 16{,}37\ldots$

168 : 26
1225 : 323
25604 : 326

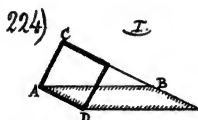
223)

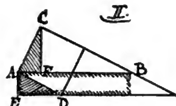


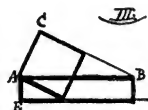




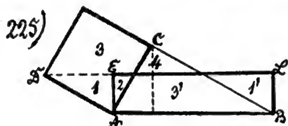
224)



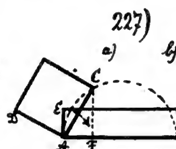


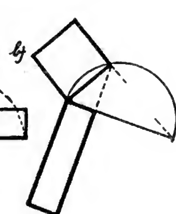


225)

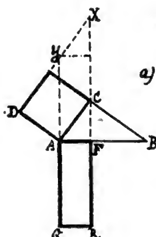


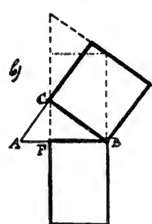
227) a) b)





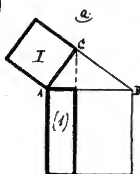
226) a) b)

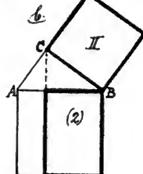


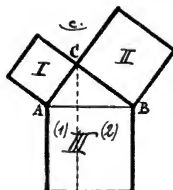


Der pythagoreische Lehrsatz.

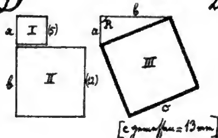
228)







229)



230)

1) Gegeben: $a=5$, $b=12$; gesucht $c=$?

Aufl. $a^2=25$, $b^2=144$ } add.!

$c^2=169$, also: $c=\sqrt{169}=13$

2) Gegeben: $a=48$, $b=55$; gesucht $c=$?

Aufl. $a^2=2304$, $b^2=3025$ } add.!

$c^2=5329$, also $c=\sqrt{5329}=73$

429 : 14

3) Gegeben: $a=8{,}8$, $b=10{,}5$; gesucht $c=$?

Aufl. $a^2=77{,}44$, $b^2=110{,}25$ } add.!

$c^2=187{,}69$, also $c=\sqrt{187{,}69}=13{,}7$

87 : 23
1869 : 267

4) Gegeben: $a=3{,}64$, $b=0{,}27$; gesucht $c=$?

Aufl. $a^2=13{,}2496$, $b^2=0{,}0729$ } add.!

$c^2=13{,}3225$, also $c=\sqrt{13{,}3225}=3{,}65$

432 : 66
3625 : 725

5061 | 191
1446 | 1719
2169 | 191
52,2729 | 364,81

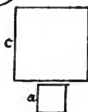
5) Gegeben: $a=7{,}23$, $b=19{,}1$; gesucht $c=$?

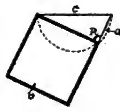
Aufl. $a^2=52{,}2729$, $b^2=364{,}81$ } add.!

$c^2=417{,}0829$; also $c=\sqrt{417{,}0829}=20{,}422\ldots$

17 : 4
1708 : 404
9229 : 4082
106505 : 4084
.....

231)





232)

1) Gegeben: $c=13$, $a=5$; gesucht $b=$?

Aufl. $c^2=169$, $a^2=25$ } subtr.!

$b^2=144$, also $b=\sqrt{144}=12$.

2) Gegeben: $c=425$, $b=87$; gesucht $a=$?

Aufl. $c^2=180625$, $b^2=7569$ } subtr.!

$a^2=173056$, also $a=\sqrt{173056}=416$

130 : 81
4956 : 826

3) Gegeben: $c=4{,}33$, $a=1{,}45$; gesucht $b=$?

Aufl. $c^2=18{,}7489$, $a^2=2{,}1025$ } subtr.!

$b^2=16{,}6464$, also $b=\sqrt{16{,}6464}=4{,}08$

64 : 8
6464 : 808

4) Gegeben: $c = 5{,}9$, $b = 3{,}47$; gesucht $a = ?$

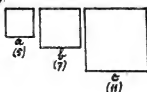
295 / 531 / 3481 1041 / 1388 / 2429 / 120409

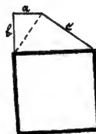
Aufl. $c^2 = 34{,}81$, $b^2 = 12{,}0409$ } subtr.!

$a^2 = 22{,}7691$, also $a = \sqrt{22{,}7691} = 4{,}771\ldots$

676 : 87
6791 : 947
16200 : 954
. . . . .

233)





234)

1) Gegeben: $a = 5$, $b = 7$, $c = 11$; gesucht $x = ?$

Aufl. $a^2 = 25$, $b^2 = 49$, $c^2 = 121$ } add.!

$x^2 = 195$, also $x = \sqrt{195} = 13{,}96\ldots$

2600 : 269
17900 : 278

2) Gegeben: $a = 60$, $c = 112$, $b = 84$, $d = 171$; gesucht $x = ?$

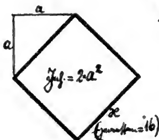
Aufl. $a^2 = 3600$, $b^2 = 7056$, $c^2 = 12544$, $d^2 = 29241$ } add.!

$x^2 = 52441$, also $x = \sqrt{52441} = 229$.

124 : 42
4041 : 449
&

235)





236)

1) Gegeben: $a = 11$; gesucht die Seite x des Doppelten von a^2.

Aufl. $a^2 = 121$

$2a^2 = 242$, also $x = \sqrt{242} = 15{,}5\ldots$

142 : 25
1700 : 30

2) Gegeben: $a = 75{,}8$; gesucht $x = ?$

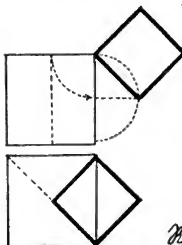
Aufl. $a^2 = 5745{,}64$

Doppelt $= 11491{,}28$, also $x = \sqrt{11491{,}28} = 107{,}19\ldots$

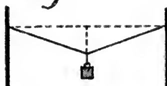
14 : 2
1491 : 207
4228 : 2141
208700 : 21429
. . . . .

237)





238)



239)

Rechnerische Auflösung von ausgewählten Aufgaben wie Nr. 6 ff. in § 18 des Textes, b

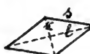
z. B.: Nr. 11)



$u = 120$,
also $s = 40$,
$h^2 = 40^2 - 20^2$
$= 1600 - 400$,
$h = \sqrt{1200} = 34{,}6\ldots$

300 : 64
4400 : 68
. . .

Nr. 13)

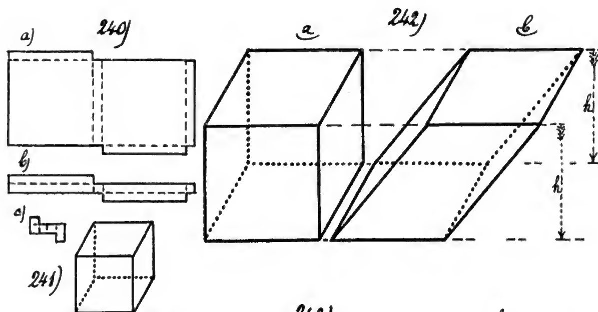


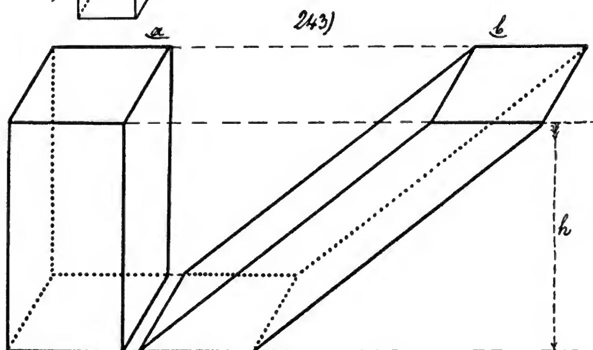
$k = \frac{e_1}{2} = 12$ und $l = \frac{e_2}{2} = 35$,

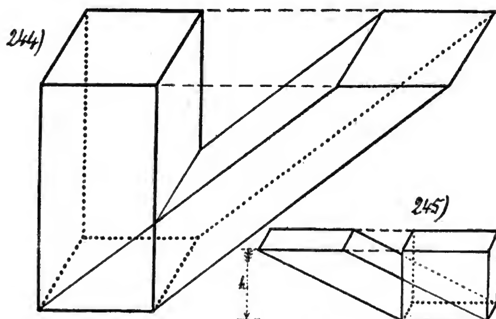
also $s^2 = 12^2 + 35^2$
$= 144 + 1225$, d. i. $= 1369$,

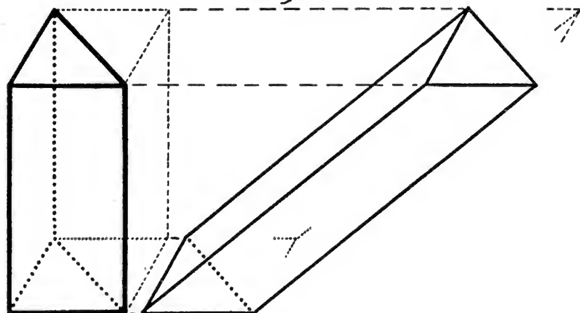
somit $s = \sqrt{1369} = 37$.

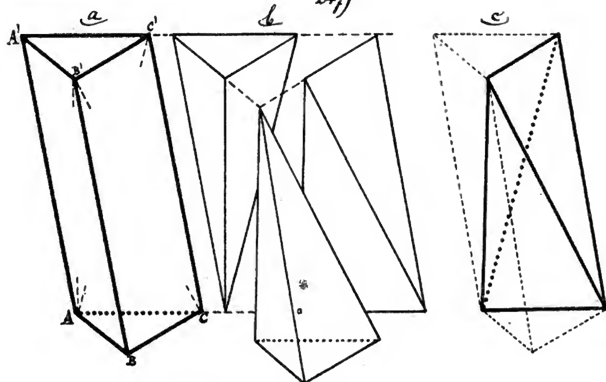
469 : 67
&

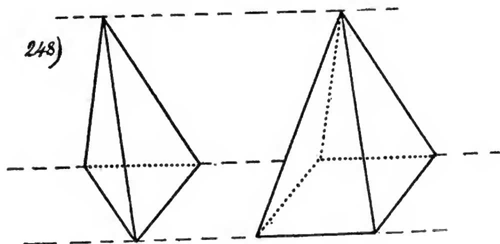

240)
a)
b)
c)
241)
a
242)
b
h
h


a
243)
b
h


244)
245)
h


246)


247)
a
b
c
A'
C'
B'
A
C
B


248)